



Técnicas de Investigaciones de Recursos Hídricos del Servicio Geológico de los Estados Unidos

INTRODUCCIÓN A LA HIDRÁULICA DE AGUAS SUBTERRÁNEAS

**Un Texto Programado para
Auto—Enseñanza**

LIBRO 3

CAPÍTULO B2



Técnicas de Investigaciones de Recursos Hídricos del Servicio Geológico de los Estados Unidos

Capítulo B2

INTRODUCCIÓN A LA HIDRÁULICA DE AGUAS SUBTERRÁNEAS

Un Texto Programado para Auto—Enseñanza

Por Gordon D. Bennett
Traducido en Español por Víctor Ricaldi y María Victoria Avendaño

Libro 3

APLICACIONES DE HIDRÁULICA

DEPARTMENT OF THE INTERIOR
DONALD PAUL HODEL, Secretary

U.S GEOLOGICAL SURVEY

Dallas L. Peck, Director

First English printing 1976

First Spanish printing 1987

UNITED STATES GOVERNMENT PRINTING OFFICE, WASHINGTON: 1987

For sale by the Books and Open-File Reports Section, U.S. Geological Survey,
Federal Center, Box 25425, Denver, CO 80225

Preface to the Spanish Edition

This text was originally printed in English in 1976, and subsequently reprinted in 1978 and in 1985. It was translated into Spanish by Victor Ricaldi and Maria Victoria Avendaño of the Association of Geoscientists for International Development, Caracas, Venezuela, and was published by chapters in the Newsletter of the Association during 1980–81. The original translation was subsequently reviewed on behalf of the U.S. Geological Survey by José Villagra of Gaithersburg, Maryland, and reviewed internally by Geological Survey personnel.

It is published herewith at the recommendation of the U.S. National Committee on Scientific Hydrology as a contribution of the United States to the International Hydrological Program of the United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO).

The Committee expresses its appreciation to all those who assisted in making the Spanish translation possible.

Della Laura
Executive Secretary, U.S. National Committee
on Scientific Hydrology

Prólogo para esta versión en Español

Este texto fué publicado originalmente en Inglés en el 1976, e imprimido de nuevo en 1978 y 1985. Fué traducido al Español por Víctor Ricaldi y María Victoria Avendaño de la Asociación de Geocientíficos para el Desarrollo Internacional en Caracas, Venezuela, y publicado por capítulos en el Noticiero de la Asociación en 1980–81. La traducción original fué revisada por cuenta del Servicio Geológico de los Estados Unidos por José Villagra de Gaithersburg, Maryland, y también, internamente, por miembros del Servicio Geológico.

El texto se publica bajo la recomendación del Comité Nacional de Hidrología Científica como una contribución de los Estados Unidos al Programa Hidrológico Internacional (IHP) de la UNESCO.

El Comité agradece a todos aquellos que han hecho posible la traducción en Español.

Della Laura
Secretaria Executiva del Comité Nacional
de Hidrologia Cientifica (USNC/SH)

PRÓLOGO

Este texto es una introducción a la hidráulica del flujo de aguas subterráneas. Con excepción de pocas discusiones en formatos de texto corriente, el material es presentado en una forma programada. De esta manera, una sección breve comprendiendo 1 ó 2 conceptos es seguida de una pregunta relacionada con los mismos. Si se elige la respuesta correcta, el lector pasa a la siguiente sección, en la cual la teoría es desarrollada o mejor explicada. Si se elige una respuesta errada, se le dirige, entonces al lector pasar a la sección donde el material anterior es repasado y se analizan las razones de por qué la respuesta es errada. Posteriormente, el lector es nuevamente dirigido a la sección inicial para elegir otra respuesta. Este método permite al estudiante parcialmente familiar con la materia, o bastante conocedor del tema, continuar inmediatamente con las siguientes secciones, mientras que aquellos que requieren más detalles pueden detenerse en las secciones que analizan las respuestas erradas.

En la preparación de cualquier texto, es difícil escoger el material a presentar. Debido a que este texto es una introducción a la materia, la discusión se restringe en su mayor parte al flujo de fluidos homogéneos, a través de un medio poroso homogéneo e isotrópico—es decir, a un medio cuyas propiedades no cambian en función de lugar o dirección. Se insiste principalmente en la teoría más que en la aplicación. Principios básicos de hidráulica de aguas subterráneas se delinean, se demuestra su utilización en el desarrollo de ecuaciones de flujo, se consideran soluciones formales representativas y se describen métodos de soluciones aproximadas. En ciertos puntos, derivaciones matemáticas rigurosas son utilizadas, por lo demás el desarrollo depende de razonamientos físicos y argumentos de verosimilitud.

Este texto presume que el lector tiene conocimientos en cálculo y física a nivel secundario. Los lectores familiarizados con ecuaciones diferenciales encontrarán este material más fácil de entender que aquellos que no lo están, además, lectores con conocimientos en teoría vectorial notarán que el

material podría haber sido presentado con gran reducción utilizando notación vectorial.

El material es presentado en 8 partes. La Parte I proporciona definiciones y conceptos hidrológicos fundamentales, tales como porosidad, caudal específico, carga y presión. La Parte II trata de la Ley de Darcy para flujo unidireccional; un formato tipo texto al final de la Parte II trata de algunas generalizaciones de la Ley de Darcy. En la Parte III, se aplica la Ley de Darcy a algunos problemas sencillos de campo. El concepto de almacenamiento de aguas subterráneas es explicado en la Parte IV. Una discusión en formato tipo texto introduce, en la Parte V, derivados parciales y su uso en las ecuaciones de aguas subterráneas; la ecuación diferencial parcial básica para flujo unidireccional y de no-equilibrio se desarrolla en el material presentado en formato programado en la Parte V. La Parte VI trata de derivaciones de las ecuaciones diferenciales parciales para flujo radial confinado y también presenta y verifica la solución "slug test" que describe los efectos de una inyección instantánea de fluido en un pozo. La última sección de la Parte VI delinea, en formato tipo texto, la síntesis de soluciones adicionales, que incluyen la ecuación de Theis, de la solución "slug test". La Parte VII presenta conceptos generales de análisis finito-diferencial introduciendo, al final, algunas técnicas de solución muy usadas. La Parte VIII considera las técnicas electro-análogas. El material de la Parte VI no es pre-requisito para las Partes VII y VIII. Los que prefieran pueden proceder directamente de la Parte V a la Parte VII.

Un bosquejo del programa, presentado en el índice general de este libro, indica la secuencia de respuestas correctas de las 8 partes y describe brevemente el material presentado en cada sección de respuestas correctas. Los lectores podrán utilizar este bosquejo para repasar o localizar tópicos de interés particular o para consultar el orden de presentación del texto.

Es imposible, en esta u otra forma de instrucción, cubrir todas las facetas de desarrollo o anticipar dificultades que cada lector pueda experimentar

máxime en un campo como es el de las aguas subterráneas, donde tanto la experiencia o conocimientos matemáticos de los lectores pueden variar mucho. Una dificultad adicional inherente a este programa es el problema de perder la continuidad en el proceso de dividir el material en secciones. Por estas razones, se sugiere que el programa de instrucción presentado sea utilizado en conjunción con una o más referencias clásicas en hidráulica de aguas subterráneas.

Este texto se basa en una serie de apuntes usados por el autor, en misión USAID, y presentados a ingenieros y estudiantes universitarios en Lahore, Paquistán. El material fue extraído de una serie de fuentes. El capítulo de Ferris (1959) en el texto de Wisler y Brater y el texto de Jacob (1950) en "Ingeniería Hidráulica", fueron utilizados extensamente. Water Supply Paper 1536-E (1962) de Ferris, Knowles, Brown y Stallman fue una importante fuente, así como el trabajo de Hubbert (1940) "La Teoría del Movimiento de Aguas Subterráneas". El texto "Flujo de Fluidos Homogéneos a Través de un Medio Poroso" de Muskat (1937) y el trabajo "Investigaciones Teóricas del Movimiento de Aguas Subterráneas" de Slichter (1899) se utilizaron como referencias básicas. El desarrollo de la ecuación de Theis de la solución "slug test" viene de la derivación presentada en la referencia original de Theis (1935). El material sobre modelos análogos es basado en una gran parte en el libro "Simulación Análoga" de Karplus (1958). Para preparar el material en

métodos numéricos se utilizó el libro "Ecuaciones Diferenciales Finitas y Simulaciones" de Hildebrand (1968), además, del trabajo "Técnicas Seleccionadas de Computación Digital para Evaluación de Recursos Hídricos Subterráneos" de Prickett y Lonquist (1971). Una variedad de referencias adicionales se mencionan en el texto.

El autor expresa su gratitud a los Señores David W. Greenman y Maurice J. Mundorff, ambos Ex-Consejeros del Proyecto USAID en Lahore, por su apoyo y estímulo durante la preparación de los apuntes originales de los cuales este texto se deriva. El autor agradece a Patricia Bennett por su cuidadosa lectura y mecanografía del manuscrito original en inglés.

Addendum para esta versión en Español

Las traducción inicial de los varios capítulos de este texto fue hecha por la AGID (Asociación de Geocientíficos Para el Desarrollo Internacional) con asistencia revisional de miembros de habla hispana del Geological Survey y fue publicada por capítulos como suplemento científico del Boletín de Aguas subterráneas.

Los responsables de la traducción original fueron Victor Ricaldi Y María Victoria Avendaño en Caracas, Venezuela. La versión presente incluye unas revisiones técnico-editoriales de José Villagra de Gaithersburg, Maryland.

INDICE GENERAL

| | Página |
|--|--------|
| Proólogo ----- | III |
| Bosquejo del Programa ----- | VI |
| Instrucciones para el lector ----- | 1 |
| Parte | |
| I. Definiciones y conceptos generales ----- | 2 |
| II. La Ley de Darcy ----- | 13 |
| Inicio del programa de instrucción ----- | 13 |
| Consideraciones tipo texto: Generalizaciones de la Ley de Darcy ----- | 28 |
| III. Aplicación de la Ley de Darcy a los problemas de campo ----- | 31 |
| IV. Almacenamiento del agua subterránea ----- | 50 |
| V. Flujo unidireccional de no equilibrio ----- | 65 |
| Consideraciones tipo texto: Las derivadas parciales en el análisis de flujo de aguas subterráneas ----- | 65 |
| Inicio del Programa de Instrucción ----- | 68 |
| VI. Flujo de no-equilibrio a un pozo ----- | 84 |
| Inicio del programa de instrucción ----- | 84 |
| Consideraciones tipo texto: Desarrollo de soluciones adicionales por superposición ----- | 108 |
| VII. Métodos de diferencias finitas ----- | 115 |
| Inicio del programa de instrucción ----- | 115 |
| Consideraciones tipo texto: Técnicas de solución por diferencias finitas de la ecuación de flujo de aguas subterráneas ----- | 131 |
| VIII. Técnicas analógicas ----- | 148 |
| Referencias ----- | 165 |

SÍMBOLOS

| Dimensiones (M, masa; L, distancia; T, tiempo) | | | Dimensiones (M, masa; L, distancia; T, tiempo) | | | Explicación |
|---|--------------------|--|---|------------------|---|-------------|
| Símbolo | | | Símbolo | | | |
| A | L^2 | Area frontal del acuífero, sección de area total de flujo | K | LT^{-1} | conductividad hidráulica | |
| a | L | espacio nodal en una red de diferencias finitas | k | L^2 | permeabilidad intrínseca | |
| b | L | espesor del acuífero | l | L | longitud | |
| C | faradio | capacitancia eléctrica | n | | porosidad | |
| | (culombio/voltio) | | p | $ML^{-1}T^{-2}$ | presión | |
| e | | base del logaritmo neperiano | Q | L^3T^{-1} | descarga volumétrica del fluido | |
| F_g | MLT^{-2} | fuerza gravitacional | q | LT^{-1} | descarga específica—descarga por unidad de superficie frontal del acuífero, Q/A | |
| f_i | MLT^{-2} | componente de la fuerza gravitacional paralela al conducto | R | ohms | resistencia eléctrica | |
| f_n | MLT^{-2} | componente de la fuerza gravitacional normal al conducto | | (voltio/amperio) | | |
| g | LT^{-2} | aceleración gravitacional | S | | coeficiente de almacenamiento | |
| h | L | carga, carga estática | S_s | L^{-1} | almacenamiento específico | |
| h_p | L | presión de carga | S_y | | rendimiento específico | |
| I | amperios | corriente eléctrica | T | L^2T^{-1} | transmisividad (transmisibilidad) | |
| | (culombio/segundo) | | u | | $r^2S/4Tt$ —argumento de función del pozo | |
| | | | V | L^3 | volumen del fluido | |
| | | | v | LT^{-1} | velocidad | |
| | | | $W(u)$ | | función del pozo | |
| | | | w | L | anchura | |
| | | | z | L | elevación sobre plano de referencia | |
| | | | β | | fracción del total del agua almacenada que puede escurrirse por gravedad | |

| | | | | | |
|----------------|-----------------|--|----------|------------|-------------------------------|
| $\Delta_{xx}h$ | L^{-1} | aproximación de diferencia finita para $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ | q | ML^{-3} | densidad de fluido |
| $\Delta_{yy}h$ | L^{-1} | aproximación de diferencia finita para $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ | q_e | ohm-metros | resistividad eléctrica |
| ϵ | culombio | carga eléctrica | σ | mhos/cm | conductividad eléctrica |
| μ | $ML^{-1}T^{-1}$ | viscosidad dinámica | ϕ | voltios | voltaje o potencial eléctrico |

UNIDADES DE CONVERSIÓN

| Sistema Inglés | Factor de Conversión | Sistema Métrico Internacional |
|---|------------------------|--|
| ft (pie) | 3.048×10^{-1} | m (metro) |
| gal (galón) | 3.785 | l (litro) |
| ft ³ /s (pies cúbicos por segundo) | 2.832×10^{-2} | m ³ /s (metros cúbicos por segundo) |

BOSQUEJO DEL PROGRAMA

Este bosquejo tiene el propósito de ayudar al lector en el repaso y le facilita la localización de tópicos particulares o discusiones del texto. Con el objeto de proporcionar también ideas, en cuanto a la organización del material y el orden de presentación, ninguno de los cuales tienden a ser claros en un plan programado.

Los números de las secciones en el margen izquierdo corresponden a las respuestas correctas en el programa de instrucción. Ellos nos proporcionan el orden a seguir si no se han cometido errores en las respuestas. Un esbozo del contenido de cada una de las secciones con respuestas correctas se da a la derecha de cada número de sección. Dos números son indicados a continuación de cada sección. Estos números identifican las secciones con respuestas incorrectas a la pregunta presentada en la sección con respuestas correctas. Las respuesta correcta a esta pregunta se indica en la siguiente anotación al margen izquierdo.

También se dan bosquejos de las presentaciones escritas en forma de texto. Para estas consideraciones se dan los números de las páginas correspondientes en paréntesis en el margen izquierdo.

| | | | |
|--|--|----|--|
| PARTE I. DEFINICIONES Y CONCEPTOS GENERALES | | 24 | omisión del gradiente de velocidad en aguas subterráneas; relación entre presión y altura de la columna de fluido (Ley de Pascal) |
| <i>Sección:</i> | | | |
| 1 | Porosidad | | 25; 19 |
| 9 | porosidad efectiva, saturación | 16 | Ley de Pascal (repaso); carga como energía potencial por unidad de peso; altura como potencial por unidad de peso debido a la elevación, dimensiones de presión |
| 6 | porosidad, saturación (repaso); variaciones de velocidad en un punto; efectos de cursos tortuosos | | 7; 15 |
| 3 | efectos de cursos tortuosos (repaso); problemas para determinar el área real de flujo; relación de descarga por unidad de área frontal a la velocidad de flujo | 26 | presión como componente de la energía potencial por unidad de volumen; presión de carga como un componente de la energía potencial por unidad de peso; energía potencial total por unidad de peso (pregunta) |
| 14 | relación de descarga por unidad de área frontal a la velocidad de flujo (repaso); definición de descarga específica o flujo específico; definición de carga | 22 | 20; 23 |
| | | | carga como energía potencial por unidad de peso (repaso); energía potencial total por unidad de volumen |

- 5; 27
8 energía potencial total por unidad de volumen (repaso)

PARTE II. LA LEY DE DARCY

Sección:

- 1 Bosquejo del enfoque—metodología para equilibrar fuerzas; la fuerza de fricción proporcional a la velocidad; la fuerza de presión sobre una cara del elemento fluido en un tubo lleno de arena (pregunta)
25; 16
- 8 relación entre la presión y la fuerza; fuerza neta de presión sobre un elemento fluido (pregunta)
23; 12
- 31 la fuerza neta de presión sobre un elemento fluido (repaso); la gradiente de presión; la fuerza neta de presión en términos de gradiente de presión (pregunta)
5; 14
- 26 la fuerza neta de presión en términos de gradiente de presión; la fuerza gravitacional; la masa de un elemento del fluido en términos de densidad, porosidad y dimensiones (pregunta)
3; 17
- 15 la fuerza gravitacional en términos de densidad, porosidad y dimensiones; los componentes de la fuerza gravitacional que contribuyen al flujo (pregunta)
22; 18
- 33 descomposición de la fuerza gravitacional en fuerzas paralelas y normales al conducto; expresión para la magnitud de los componentes paralelos al conducto (pregunta)
6; 37
- 35 expresión para el componente de la fuerza gravitacional paralelo al conducto (repaso); sustitución de $\Delta z/\Delta l$ el coseno de esta expresión (pregunta)
32; 4
- 11 sustitución de $\Delta z/\Delta l$ por coseno en la expresión para el componente de gravedad a lo largo del conducto (repaso); expresión para la fuerza direccional total sobre un elemento del fluido atribuible a la presión y a la gravedad (pregunta)
24; 10
- 19 hipótesis relacionadas con la fuerza de fricción, expresión para la fuerza de fricción compatible con las hipótesis (pregunta)
2; 34
- 20 equilibrio de las fuerzas direccionales y las fuerzas de fricción para obtener la forma preliminar de la Ley de Darcy
36; 27
- 28 la Ley de Darcy en términos de conductividad hidráulica; sustitución de

$$\frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dl} + \frac{dz}{dl}$$

por dh/dl (pregunta)
9; 30

- 7 consideraciones sobre la conductividad hidráulica y la permeabilidad intrínseca; flujo del agua subterránea en relación a las diferencias en elevación, presión y carga (pregunta)
29; 13
- 21 la Ley de Darcy como una ecuación diferencial; analogías con otros sistemas físicos; potencial de la velocidad de aguas subterráneas.

CONSIDERACIONES TIPO TEXTO—GENERALIZACIONES DE LA LEY DE DARCY:

- el vector descarga específica en tres dimensiones; definición de los componentes del vector descarga específica
- la Ley de Darcy para los componentes del vector descarga específica; el uso de la resultante del vector descarga específica en la Ley de Darcy
- velocidad potencial; análisis de la red de flujo; la Ley de Darcy para los componentes del vector descarga específica en un medio anisotrópico
- líneas de flujo y superficies de igual carga en un caso anisotrópico; solución por transformación de coordenadas
- anisotropía de material sedimentario estratificado
- uso de los componentes de las gradientes de presión y de los componentes de la fuerza gravitacional en cada una de las mayores direcciones de permeabilidad; tensor de conductividad hidráulica
- heterogeneidad del acuífero
- heterogeneidad del fluido; la Ley de Darcy para un fluido heterogéneo en un acuífero anisotrópico utilizando la permeabilidad intrínseca.

PARTE III. APLICACIÓN DE LA LEY DE DARCY A LOS PROBLEMAS DE CAMPO

Sección:

- 1 ecuaciones diferenciales y soluciones
15; 23
- 7 número infinito de soluciones para una ecuación diferencial
29; 14
- 8 conceptos de intercepción de la pendiente aplicados a la solución de ecuaciones diferenciales
5; 20
- 10 aplicación de la Ley de Darcy para equilibrio unidimensional a un problema de infiltración suplida por un río; selección de solución particular para satisfacer la ecuación diferencial y producir una carga correcta en el río (pregunta)
22; 36
- 24 condiciones límites en las ecuaciones diferenciales; interpretación de los datos de carga observados en un caso de campo (pregunta)
42; 21
- 25 aplicación de la Ley de Darcy al problema de flujo continuo unidimensional no confinado, utilizando las hipótesis de Dupuit
26; 43
- 9 sustitución de

$$\frac{1}{2} \frac{d(h^2)}{dx}$$

por

$$h \frac{dh}{dx}$$

en el problema de flujo no confinado; pruebas de soluciones por diferenciación sustitución de condiciones límites (pregunta)

- 41 gráfico de la carga de pendiente parabólica en la solución Dupuit; problemas de flujo radial a un pozo; sección de flujo a una distancia r del pozo (pregunta)
16; 4
- 27 reducción del área a lo largo del trayecto del flujo radial; relación entre disminución de área y gradiente hidráulica
12; 6
- 40 símbolos en problemas de flujo radial; aplicación de la Ley de Darcy a problemas de flujo (pregunta)
33; 17
- 35 expresión de la ecuación diferencial para flujo radial en términos de

$$\frac{dh}{d(\ln r)}$$

- 39; 13
- 2 interpretación de la ecuación diferencial para flujo radial expresada en términos de

$$\frac{dh}{d(\ln r)}$$

- 38 interpretación de la ecuación diferencial para flujo radial (repaso); ecuación resultante obtenida del gráfico de h versus $\ln r$; conversión a logaritmos comunes; características gráfico semi-logarítmico;
18; 31
- 19 cono de depresión logarítmico; ecuación de abatimiento en el pozo (pregunta)
34; 37
- 3 aplicación de la ecuación de abatimiento; características generales de problemas de flujo de pozo.
28; 30

PARTE IV.-ALMACENAMIENTO DEL AGUA SUBTERRÁNEA

Sección:

- 1 relación entre el volumen de agua almacenada en un tanque y el nivel de agua en el tanque
10; 9
- 11 relación entre el volumen de agua almacenada en un tanque con arena y el nivel de agua en el tanque
31; 12
- 14 pendiente del gráfico de V versus h para el tanque con arena
17; 22
- 26 factores capilares; hipótesis que una cantidad constante de agua es permanentemente retenida; relación entre volumen de agua en almacenamiento

recuperable y el nivel de agua, bajo estas condiciones (pregunta)

- 18; 2
- 16 pendiente del gráfico de V versus h para un tanque con arena y retención capilar permanente
4; 29
- 33 pendiente del gráfico de V versus h para un prisma de un acuífero libre
28; 19
- 32 relación de dependencia de V , h sobre una superficie, A ; definición de rendimiento específico (pregunta)
7; 27
- 6 almacenamiento confinado o compresivo; relaciones V y h para un prisma en un acuífero confinado
23; 30
- 21 dependencia del gráfico V , h para un prisma de un acuífero confinado de área de base
3; 34
- 20 definición del coeficiente de almacenamiento confinado o compresivo; almacenamiento específico
5; 15
- 25 ecuación de almacenamiento-relación entre rapidez de cambio de volumen de agua en almacenamiento y rapidez de cambio de carga
8; 24
- 13 relación entre rapidez de cambio de volumen en almacenamiento y rapidez de cambio de carga (repaso)

PARTE V. CONSIDERACIONES TIPO TEXTO DERIVADAS PARCIALES EN EL ANÁLISIS DE FLUJO DE AGUAS SUBTERRÁNEAS

Derivadas parciales, ejemplo de mapa topográfico. Cálculo de derivadas parciales (espacial)

Derivadas parciales con respecto al tiempo

Derivadas espaciales como componentes de la pendiente de la superficie potenciométrica; dependencia de posición y tiempo, derivada de tiempo como la pendiente del hidrógrafo; dependencia de posición y tiempo.

Formulación vectorial del caudal específico; Ley de Darcy para componentes del vector de caudal específico

FLUJO UNIDIRECCIONAL DE NO-EQUILIBRIO

Sección:

- 1 relación de flujo de entrada y salida para un tanque
29; 17
- 21 ecuación de continuidad; relación de $\partial h / \partial t$ para un prisma de acuífero para diferenciar entre el flujo de entrada y el de salida; (pregunta)
6; 5
- 30 combinación de la ecuación de continuidad y de almacenamiento para obtener la relación entre $\partial h / \partial t$ y el flujo de entrada menos el de salida (repaso); la expresión de flujo de entrada a través de una cara del prisma del acuífero (pregunta)
8; 3
- 22 implicaciones de la diferencia entre el flujo de entrada y el de salida de un prisma del acuífero (pregunta)
14; 26

33 expresión de entrada menos salida para flujo unidimensional en términos de diferencia de gradiente de carga (pregunta)

18; 15

9 cambios en una variable dependiente expresados como un producto de la derivada y cambio en la variable independiente (pregunta)

25; 20

16 cambio en la variable dependiente como producto de la derivada y cambio en la variable independiente (repaso); cambio en la derivada como producto de una segunda derivada y cambio en la variable independiente (pregunta)

31; 13

7 segundas derivadas y segundas derivadas parciales; expresión del cambio en $\partial h/\partial x$ en términos de segunda derivada (pregunta)

4; 23

32 expresión de cambio en $\partial h/\partial x$ en términos de segunda derivada (repaso); expresiones para entrada-salida utilizando las segundas derivadas (pregunta)

27; 2

34 definición de transmisividad; expresión de entrada menos salida para flujo unidimensional a través de un prisma del acuífero en términos de T y $\partial^2 h/\partial x^2$; igualar el flujo de entrada menos el de salida y la proporción de acumulación; expresión de la proporción de acumulación en términos de coeficiente de almacenamiento (pregunta)

28; 12

10 Poner en ecuación la rapidez de acumulación expresada en términos del coeficiente de almacenamiento, con la expresión de flujo de entrada menos el de salida para obtener la ecuación diferencial parcial para flujo unidimensional de no-equilibrio (pregunta)

11; 24

19 ecuación diferencial parcial para flujo bidimensional de no-equilibrio; ecuaciones diferenciales parciales y sus soluciones; repaso del método de derivar ecuaciones diferenciales para flujo de aguas subterráneas.

PARTE VI. FLUJO DE NO-EQUILIBRIO A UN POZO

Sección:

1 expresión de flujo a través del área interna de un elemento cilíndrico (pregunta)

34; 36

15 combinación de r y $\partial h/\partial r$ en una variable simple; expresión de flujo de entrada menos el de salida para un elemento cilíndrico

30; 25

7 uso de

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)}{\partial r} \Delta r$$

en lugar de

$$r \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_2 - r \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 ;$$

expresión para

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

26; 8

28 expresión final de flujo de entrada menos el de salida para un elemento cilíndrico; expresión de la razón de la acumulación en almacenamiento en el elemento (pregunta)

12; 16

37 combinación del término flujo de entrada menos el de salida con el término de razón de acumulación para obtener la ecuación diferencial parcial

22; 32

27 procedimiento de prueba de una función para determinar si es una solución a la ecuación diferencial parcial. Cálculo de la primera derivada radial de la función de prueba.

4; 2

5 cálculo de la segunda derivada radial para la función de prueba.

23; 9

35 cálculo de la derivada de tiempo de la función de prueba

3; 31

20 expresiones para

$$\frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

y

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r}$$

para la función de prueba

17; 24

21 verificación que la función de prueba es una solución; problemas de inyección instantánea (slug test); desarrollo de condiciones límites requeridas para $t=0$

10; 19

18 verificación que la prueba de la función satisface las condiciones límites para $t=0$; demostración gráfica de su comportamiento para $t \rightarrow 0$; desarrollo de las condiciones límites para $r \rightarrow \infty$

29; 6

33 relación entre la condición cuando $(\partial h/\partial r) \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$ y la condición cuando $h \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$; demostración que la función de prueba satisface también $h \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$; desarrollo de la condición

$$V = \int_0^\infty S \cdot h_{r,t} \cdot 2\pi r dr$$

11; 14

13 demostración que la función de prueba satisface

$$V = \int_{r=0}^{\infty} S \cdot h_{r,t} \cdot 2\pi r dr;$$

discusión del significado de la solución del "slug test"

CONSIDERACIONES TIPO TEXTO—DESARROLLO DE SOLUCIONES ADICIONALES POR SUPERPOSICION

Linealidad de la ecuación radial; superposición; ecuaciones para la carga a t debido a la inyección a $t=0$

superposición para obtener efecto de dos inyecciones
expresión de cambio de carga debido a descarga instantánea; superposición para obtener efectos de descarga repetida

valores variables para bombeo continuo como una secuencia de descargas infinitesimales; efecto de descarga durante un tiempo infinitesimal dt ; uso de la superposición para obtener cambio de carga debido a bombeo durante un intervalo finito de tiempo

implementación de la superposición por integración de la expresión para cambio de carga debido a descarga instantánea, para casos de bombeo con descarga variable.

transformación de la integral a la integral exponencial, para el caso de bombeo constante

definiciones de u ; evaluación de la integral exponencial por medio de series

definición de la función de pozo; ecuación para el caso cuando $h \neq 0$ antes del bombeo; ecuación en términos de abatimiento; la ecuación de Theis desarrollo de la fórmula modificada de no-equilibrio (aproximación semilogarítmica)

repaso de las suposiciones en la derivación de la ecuación diferencial parcial para flujo radial

repaso de las suposiciones en la solución de inyección instantánea y en la solución de bombeo continuo (volumen constante)

repaso de las suposiciones en la aproximación semilogarítmica; citación de literatura sobre extensiones de la teoría de flujo al pozo para sistemas más complejos.

PARTE VII. METODOS DE DIFERENCIAS FINITAS

Sección:

- 1 expresiones diferenciales finitas para la primera derivada espacial (pregunta)
7; 26
- 12 expresiones diferenciales finitas para la segunda derivada espacial (pregunta)
27; 22
- 15 expresión diferencial-finita para

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

(pregunta)
28; 24

- 3 expresión diferencial-finita para

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

(repaso)

notación convenida para la carga en un nodo
14; 5

- 2 expresión para

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

utilizando subíndices

20; 18

- 4 tercera regla de subíndices para el eje tiempo
9; 23

- 10 expresión para

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

para un tiempo y punto particular, utilización de índices; aproximaciones a $\partial h/\partial t$; aproximaciones "forward difference" finitas para la ecuación de flujo de aguas subterráneas, utilizando índices
8; 19

- 16 aplicación de las ecuaciones "forward difference" para predecir valores de carga; técnicas (definición) de iteración (relajamiento); ecuaciones diferenciales finitas para flujo bidimensional en equilibrio (pregunta)
11; 13

- 25 solución a la ecuación de estado constante por medio de iteración
21; 6

- 17 discusión general de métodos numéricos

CONSIDERACIONES TIPO TEXTO—TECNICAS DE SOLUCION POR DIFERENCIAS FINITAS DE LA ECUACIÓN DE FLUJO DE AGUAS SUBTERRÁNEAS

aproximaciones "forward difference" y "backward difference" a la derivada de tiempo.

simulación a la "forward difference" de la ecuación de flujo del agua subterránea; método explícito a la solución

errores; técnicas estables e inestables

simulación "backward difference" a la ecuación de flujo del agua subterránea; grupos de ecuaciones simultáneas

solución por técnicas de iteración o relajamiento
solución de la ecuación de estado constante por iteración

solución de la ecuación de no-equilibrio, simulación "backward difference" por iteración

niveles de iteración, notación con índices; parámetro de iteración

sobrerelajamiento sucesivo. Técnicas de dirección alterna

simulaciones forward y backward difference para la ecuación de flujo del agua subterránea utilizando la notación Δ

procedimiento implícito de dirección alterna
 el algoritmo de Thomas para la solución de grupos
 de ecuaciones a lo largo de filas o columnas
 iteración de la ecuación de estado constante utili-
 zando el método de dirección alterna para el
 cálculo
 solución iterativa utilizando la simulación "backward
 difference" y la técnica de dirección alterna por
 computación

PARTE VIII. TÉCNICAS ANALÓGICAS

Sección:

- 1 la Ley de Ohm, definiciones de corriente y resistencia
19; 8
- 6 definiciones de resistividad y conductividad; la Ley
de Ohm en términos de resistencia
24; 3
- 28 la Ley de Ohm en términos de conductividad; ana-
logía entre la Ley de Ohm y la Ley de Darcy para
flujo en una dimensión
12; 7
- 26 analogía entre la Ley de Ohm y la Ley de Darcy para
flujo en una dimensión; extensión a 3 dimen-
siones; densidad de la corriente; flujo de carga en
una lámina conductora
25; 23
- 11 analogía entre flujo de carga en una lámina conduc-
tora y flujo de agua a través de un acuífero hori-
zontal. Método para obtener analogía en sentido

- continuo. Comparación entre la línea de voltaje
constante y la línea de carga constante (pregunta)
16; 17
- 21 modelo de no-equilibrio; almacenamiento de carga
en un condensador y analogía con el almacena-
miento de aguas subterráneas; ecuaciones para
condensadores
13; 10
- 9 relación entre la rapidez de cambio de voltaje y la
rapidez de cambio de acumulación de carga para
un condensador; relación entre corriente hacia un
condensador y la rapidez de cambio de voltaje
20; 18
- 4 relación entre la rapidez de cambio de voltaje y la
rapidez de acumulación de carga para un conden-
sador (repaso); relación de continuidad eléctrica,
relación entre corriente y rapidez de cambio del
voltaje del condensador para un sistema de 4
resistencias conectadas a un condensador; trans-
formación de estas ecuaciones en términos de vol-
tajes y $d\phi_0/dt$ (pregunta)
15; 27
- 22 analogía entre ecuación para condensadores-sistema
de 4 resistencias con formas de diferencias finitas
para ecuaciones de flujo de aguas subterráneas
bidimensionales; método para modelar casos de
desequilibrio.
2; 14
- 5 análisis general de las técnicas analógicas, hetero-
geneidad, secciones analógicas, flujo radial
análogo.

INTRODUCCIÓN A LA HIDRÁULICA DE AGUAS SUBTERRÁNEAS—UN TEXTO PROGRAMADO PARA AUTO-ENSEÑANZA

Por Gordon D. Bennett

INSTRUCCIONES PARA EL LECTOR

Este texto programado está diseñado para ayudarle a comprender la teoría de la hidráulica de aguas subterráneas por medio de la auto-enseñanza. La instrucción programada es un enfoque a una materia, un método de aprender; que no elimina el esfuerzo mental del proceso de aprendizaje. Algunas secciones de este programa necesitan solamente ser leídas; otras tendrían que ser elaboradas con lápiz y papel. Algunas preguntas pueden ser contestadas directamente; otras requieren cálculos. A medida que se avanza en el texto, tendrá que consultar frecuentemente textos o referencias sobre matemáticas, mecánica de fluidos e hidrología.

En cada una de las ocho partes del texto, inicie el programa de instrucción leyendo la Sección 1. Elija una respuesta a la pregunta al final de la sec-

ción y diríjase a la nueva sección indicada al lado de la respuesta escogida. Si su respuesta fue correcta, pase a la sección que contiene materia nueva y otra pregunta, y proceda tal como en la Sección 1. Si su respuesta no fue correcta, diríjase a la sección que contiene explicaciones adicionales sobre el tema anterior y que le indica volver a la pregunta inicial e intentar de nuevo.

En este caso, valdrá la pena repasar el material de la sección anterior. Continúe de esta manera en el programa hasta que llegue a la sección que indica el final de la parte. Observe que aunque las secciones están en orden numérico en cada una de las ocho partes, por lo general, usted no procederá en secuencia numérica (Sección 1 a la Sección 2, etc.) de principio a fin.

Parte I. Definiciones y Conceptos Generales

Introducción

En la Parte I, se introducen ciertos conceptos que son frecuentemente utilizados en la hidráulica de aguas subterráneas. Entre estos están porosidad, caudal específico, carga hidráulica y presión del fluido. No se intenta un desarrollo estricto de

teoremas relacionados con estos términos. Este material sólo intenta introducir y definir estos términos y proporcionar un indicio a sus significados físicos.

La porosidad de un espécimen de materia porosa se define como la relación entre el volumen del espacio poroso abierto en el espécimen y el volumen total del mismo.

Pase a la Sección:

| | |
|------------------|----|
| 0,5 pies cúbicos | 13 |
| 0.2 pies cúbicos | 18 |
| 0.8 pies cúbicos | 9 |

PREGUNTA

¿Qué volumen de materia sólida contiene un pie cúbico de arenisca, si la porosidad de la misma es 0.20?

1.

En la Parte I no hay ninguna instrucción para pasar a la Sección 2. Tal vez usted acaba de leer la Sección 1 y pasó a la Sección 2 sin haber tomado en cuenta la pregunta en la Sección 1. Si así lo hizo, regrese a la Sección 1, elija una respuesta a la

pregunta y pase a la sección indicada en el margen derecho sobre la misma línea de su respuesta.

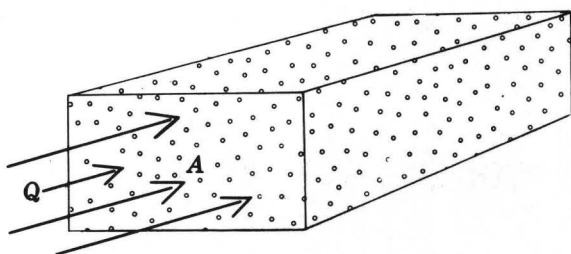
2.

Su respuesta en la Sección 6 es correcta. Cualquier línea de flujo entre A y B será mayor que la distancia AB; generalmente, es imposible conocer la verdadera distancia que una partícula de fluido recorre cuando atraviesa una sección de material poroso.

También es difícil saber la verdadera área de sección transversal de flujo, cuando se trata de flujo en un medio poroso. No importa qué área se escoja, parte de la sección transversal será ocupada por granos de materia sólida y parte por poros que contienen el fluido. Por esta razón se

podrían presentar problemas si intentamos definir la velocidad promedio del fluido como la relación de descarga al área de la sección, como comúnmente se hace en la hidráulica de flujo en cauce abierto.

3.



3. — Con.

Su respuesta en la Sección 6 es incorrecta. Si los dos puntos estuviesen conectados por un tubo

4.

Su respuesta en la Sección 22 es incorrecta. La presión sí representa energía potencial por unidad

5.

Su respuesta en la Sección 9 es correcta. El treinta por ciento del espacio poroso interconectado en un medio poroso, cuya verdadera porosidad es 0,20, es seis por ciento del volumen total, ó 0,06 pies cúbicos. En el resto del programa, se va a asumir que el estado de flujo es completamente saturado a no ser que se indique específicamente flujo no saturado.

Por naturaleza, cambios en la velocidad de flujo de una partícula líquida son propios en el flujo a través de medios porosos. La resistencia limítrofe, dentro de cada poro, causa que la velocidad dismi-

6.

PREGUNTA

En el bloque de material poroso saturado, una descarga del fluido Q cruza el área A perpendicularmente. A representa el área total de la faz del bloque que incluye partículas sólidas y espacio para poros llenos de fluido. El cociente, Q/A , sería

Pase a la Sección:

| | |
|---|----|
| menor que | 14 |
| Igual a | 28 |
| mayor que | 10 |
| la velocidad promedio de las partículas líquidas. | |

capilar, la partícula recorrería una distancia igual al intervalo lineal AB ; pero la probabilidad de dicha conexión en un medio poroso típico es cero. Por lo general, las posibles trayectorias de flujo entre dos puntos serían tortuosas.

Regrese a la Sección 6 y elija otra respuesta.

de volumen causada por las fuerzas transmitidas por el fluido que la rodea, pero z representa la energía potencial por unidad de peso causada por su elevación. La pregunta pedía el total de energía potencial por unidad de volumen.

Regrese a la Sección 22 y elija otra respuesta.

nuya de su máximo a lo largo del centro, a prácticamente cero al borde del poro.

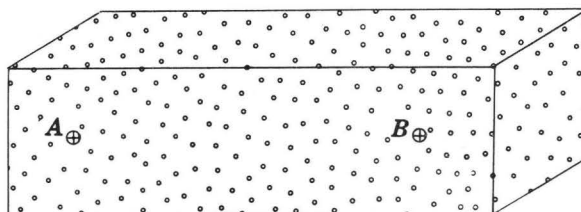
Otra forma de variación en la velocidad de flujo es impuesta por el carácter tortuoso del mismo; es decir, las repetidas ramificaciones y luego enlaces de las líneas de flujo a medida que las partículas se habren paso a través de los granos sólidos. Este patrón de flujo anastomótico o entrelazado causa que la velocidad de una partícula líquida varíe en magnitud y dirección de un punto a otro, aún si su movimiento ocurre a lo largo de una línea central del poro. Sin embargo, si nos fijamos en un pequeño segmento del medio pero que sea lo suficientemente grande de manera que contenga un gran número de poros, descubrimos que los componentes microscópicos del movimiento se cancelan en todas las direcciones excepto en una que es la dirección resultante del flujo.

PREGUNTA

En el bloque poroso en la figura, una partícula de fluido que se traslada del punto A al punto B recorrería una distancia:

Pase a la Sección:

| | |
|----------------------------------|----|
| mayor que la distancia lineal AB | 3 |
| igual a la distancia lineal AB | 4 |
| menor que la distancia lineal AB | 21 |



Con.—6.

Su respuesta en la Sección 16 es incorrecta. Si estuviésemos tomando en cuenta la altura de una columna estática de agua sobre un punto, la cual como observamos es dada por $p/\rho g$, estaríamos tratando con dimensiones de energía potencial por unidad de peso. Sin embargo, la pregunta en la Sección 16, se refiere solamente a unidades de presión. Estas unidades son fuerza por unidad de área; por ejemplo, libras de fuerza por pie cua-

drado de área expresadas en forma de lb/ft^2 . Podríamos multiplicar estas unidades por ft/ft para obtener un equivalente de unidades aplicables a presión.

Regrese a la Sección 16 y elija otra respuesta.

7.

Su respuesta, $p + \rho g z$, en la Sección 22 es correcta. Hemos visto que la presión es equivalente a la energía potencial por unidad de volumen atribuible a la fuerza transmitida a través del fluido circundante. La energía potencial por unidad de volumen debida a la elevación se obtiene multiplicando la energía potencial por unidad de peso causada por la elevación z , por el peso por unidad de volumen ρg . Por consiguiente, la energía potencial total por unidad de volumen es la suma de estos dos términos, es decir, $p + \rho g z$.

Ninguna discusión sobre la energía de flujo sería completa sin mencionar la energía cinética. En la mecánica de partículas sólidas la energía cinética, EC, de una masa, m , que se mueve a una velocidad v , se da por $EC = mv^2/2$.

Supongamos que se trate de un fluido con densidad de masa ρ . Deseamos saber la energía cinética de un volumen, V , de este líquido que se mueve con velocidad v . La masa del volumen es ρV y la energía cinética es $\rho V v^2/2$. Si dividimos por el volumen V , obtenemos $\rho v^2/2$ como la energía cinética por unidad de volumen del fluido; dividiendo por el peso por unidad de volumen, ρg , obtenemos

$v^2/2g$ como la energía cinética por unidad de peso del fluido. Cada una de estas expresiones de energía cinética es proporcional a la velocidad al cuadrado. Casi siempre, las velocidades de flujo en el movimiento de aguas subterráneas son extremadamente bajas y por eso los términos de energía cinética son sumamente pequeños comparados a los términos de energía potencial.

Por consiguiente, cuando se trata de problemas de aguas subterráneas, podemos ignorar por completo la energía cinética y tomar en cuenta únicamente la energía potencial del sistema y la pérdida de energía potencial causada por la fricción. Esta es una diferencia importante entre la hidráulica de aguas subterráneas y la hidráulica de aguas superficiales.

Con esta discusión concluye la Parte I. En la Parte II se tratará la Ley de Darcy que relaciona el caudal específico, q , a la gradiente de carga hidráulica, para flujo en un medio poroso.

8.

Su respuesta en la Sección 1 es correcta; si 0.20 del cubo es ocupado por el espacio poroso, 0.80 de este volumen debe ser materia sólida. En estudios de aguas subterráneas, estamos, interesados en la porosidad interconectada o efectiva, la cual es la relación del volumen de los poros interconectados—excluyendo poros completamente aislados—al volumen total. En este texto, el término “porosidad” se referirá siempre a la porosidad interconectada o efectiva. Las aguas subterráneas se presentan en condiciones de saturación cuando todos los espacios porosos interconectados están totalmente llenos de agua, y se presen-

tan condiciones de no saturación cuando parte de los poros contienen agua y parte aire. En problemas de flujo no saturado, el grado de saturación es expresado a menudo como el porcentaje de los espacios porosos intercomunicados.

PREGUNTA

¿Qué volumen de agua es contenido en 1 pie cúbico de material poroso, si la porosidad efectiva es 0.20 y la saturación, expresada en porcentaje del espacio poroso interconectado, es de 30 por ciento?

Pase a la Sección:

| | |
|-------------------|----|
| 0.30 pies cúbicos | 12 |
| 0.06 pies cúbicos | 6 |
| 0.20 pies cúbicos | 29 |

9.

Su respuesta en la Sección 3 es incorrecta. El área A, que es perpendicular a la dirección del flujo, representa el área de sección transversal total del bloque poroso. Una parte de esta área está ocupada por granos sólidos y una parte por espacios porosos abiertos. Digamos que el 20 por

ciento de esta área A representa el espacio poroso, entonces la verdadera área de sección transversal disponible para el flujo es 0.2 A. Si consideramos la relación de descarga al área de flujo igual a la velocidad promedio, sin considerar ningún otro factor, tendríamos que usar la relación $Q/0.2A$. La verdadera velocidad media excedería incluso esta cantidad, debido a la distancia adicional que sería recorrida por el flujo tortuoso.

Regrese a la Sección 14 y elija otra respuesta.

10.

Su respuesta en la Sección 14 es incorrecta. La columna de agua en el piezómetro es estática, pero h , es la altura del nivel de esta columna sobre el

punto de medida 0 (h , es algunas veces referida como la presión de carga al punto 0). Hemos definido carga como la elevación sobre el nivel de referencia al tope de la columna estática de agua que puede ser soportada en este punto.

Regrese a la Sección 14 y elija otra respuesta.

11.

Su respuesta en la Sección 9 es incorrecta. La saturación se expresa aquí como un porcentaje de los espacios porosos interconectados, no como un

porcentaje del volumen de la muestra; es decir 30 por ciento de los espacios porosos interconectados está ocupado por agua. Debido a que la porosidad efectiva dada es de 0.20 y el volumen de la muestra de 1 pie cúbico, el volumen de espacios porosos interconectados es 0.20 pies cúbicos.

Regrese a la Sección 9 y elija otra respuesta.

12.

Su respuesta en la Sección 1 es incorrecta. La porosidad es definida por la ecuación

$$n = \frac{V_p}{V_g} = \frac{V_p}{V_s + V_p},$$

donde V_p es el volumen del espacio poroso en el espécimen, V_g es el volumen total del mismo, y V_s es el volumen de material sólido del espécimen (observe que $V_g = V_s + V_p$). La pregunta en la

Sección 1 pide el volumen del material sólido V_s , en un espécimen, para el cual el volumen total V_g , es 1 pie cúbico y la porosidad n , es 0.20.

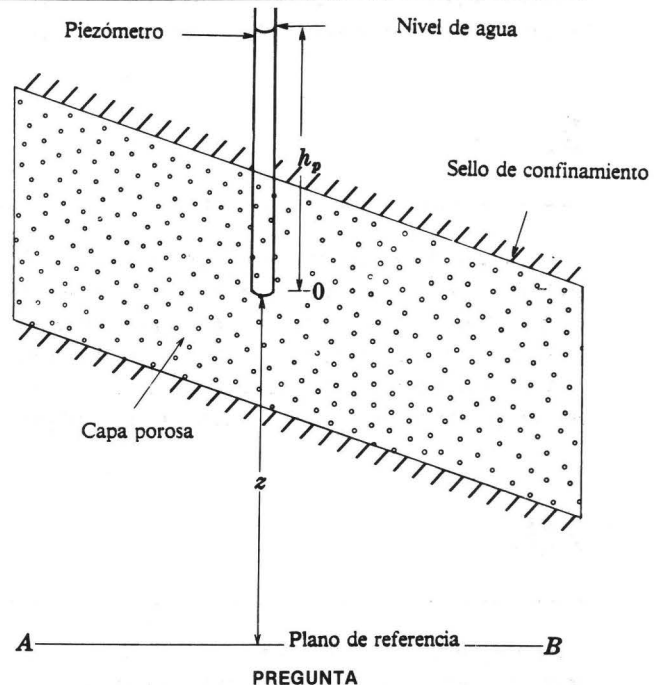
Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

13.

Su respuesta en la Sección 3 es correcta. Q/A será menor que la velocidad promedio del fluido, ya que el área de sección transversal total, A , será mayor que el área de sección transversal de flujo. En muchos medios porosos, la proporción de área de flujo al área de sección transversal puede ser considerada igual a la porosidad interconectada del medio.

Hemos observado que, por lo general, es difícil o imposible saber o medir la velocidad real del fluido o el área de sección transversal real de flujo en un medio poroso. Por lo cual, trabajaremos en términos de descarga y área total de una sección. Es decir, utilizaremos la cantidad Q/A , donde Q es la descarga a través de un segmento de material poroso, y A es el área de sección transversal total del segmento. Esta cantidad es referida como el caudal específico o flujo específico y se designa con el símbolo q .

Otro concepto que utilizaremos con frecuencia es la carga estática o simplemente carga. En problemas de aguas subterráneas, la carga en un punto se toma como la elevación, (o altura) sobre un punto de referencia arbitrario, de una columna estática de agua que puede ser sostenida sobre este punto. Al utilizar esta definición, asumimos que la densidad del agua en la columna con que medimos es igual a la del agua subterránea y que la densidad del agua subterránea es uniforme.



El diagrama representa la sección de una capa porosa confinada; el plano AB es el punto de referencia y se coloca un piezómetro al punto 0. ¿Cuál es la carga en el punto 0?

Pase a la Sección:

| | |
|------------------------|----|
| la distancia h_p | 11 |
| la distancia z | 17 |
| la distancia $h_p + z$ | 24 |

14.

Su respuesta en la Sección 16 es incorrecta. Por lo general, presión se expresa como fuerza por unidad de área, por ejemplo en libras por pie cuadrado y se escribe lb/ft^2 . Un término con unidades de trabajo o energía por unidad de área tal como $\text{ft}\cdot\text{lb}/\text{ft}^2$, representaría el producto de la presión y

un término con unidades de distancia, pies. Aquí, únicamente, estamos interesados en un grupo equivalente de unidades de presión. Ahora observe que si el término presión fuera multiplicado por un factor adimensional con unidades ft/ft , obtendríamos un resultado todavía expresado en unidades de presión.

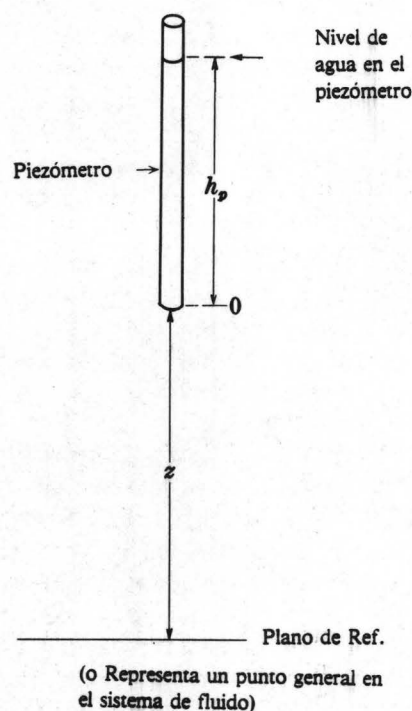
Regrese a la Sección 16 y elija otra respuesta.

15.

Su respuesta, $p/\rho g$, en la Sección 24 es correcta. La columna de agua dentro del tubo es estática y deberá regirse por las leyes de la hidrostática. Entonces la presión en la base del tubo se relaciona con la altura de la columna de agua en el tubo por la Ley de Pascal, la cual tiene la forma $p = \rho g h_p$ ó $h_p = p/\rho g$; h_p sirve para medir la presión del punto situado al final del tubo y por esta razón se denomina la presión de carga (o de caída) en ese punto. Se suma a la elevación del punto para obtener la carga para el mismo.

La carga en aguas subterráneas es en realidad una medida de la energía potencial por unidad de peso de agua. Este es un concepto muy importante.

La elevación, z , en el diagrama representa la energía potencial de una unidad de peso de agua al punto 0 que resulta de la posición del punto sobre el plano de referencia. Por ejemplo, si z es 10 pies, 10 lbs de agua en los alrededores del punto 0 pueden lograr 100 pies-lbs de trabajo al caer al plano de referencia. La energía potencial por unidad de peso de agua en el punto 0 debido a la elevación del punto será de 10 pies. Similarmente, el término para la presión h_p , representa la energía potencial de una unidad de peso de agua en el punto 0, originado por las fuerzas ejercidas sobre el punto por el fluido circundante. Este concepto se amplía más en las siguientes secciones.



PREGUNTA

Presión se considera comúnmente como fuerza por unidad de área. Dimensionalmente esto equivale a:

Pase a la Sección:

16.

| | |
|-------------------------------|----|
| energía por unidad de peso | 7 |
| energía por unidad de volumen | 26 |
| trabajo por unidad de área | 15 |

Su respuesta en la Sección 14 es incorrecta. z es la elevación del punto sobre el plano de referencia; definimos la carga como la elevación—sobre este plano—de la parte superior de la columna estática de agua que puede ser sostenida por este punto. La columna de agua en el piezómetro es estática

cuando las condiciones en el medio poroso están en equilibrio.

Regrese a la Sección 14 y elija otra respuesta.

17.

Su respuesta en la Sección 1 es incorrecta. Si la porosidad es 0.20, se tendrá 0.20 pies cúbicos de espacio poroso en un espécimen de 1 pie cúbico de volumen. La pregunta pide el volumen de material sólido en el espécimen.

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

18.

Su respuesta en la Sección 24 es incorrecta. La columna de agua dentro del tubo es estática y debe regirse por las leyes de la hidrostática. La presión a una profundidad d debajo de la superficie del agua, en un cuerpo de agua estática, se obtiene por la ley de Pascal como

$$p = \rho g d,$$

donde nuevamente ρ es la densidad de masa del agua, g es la aceleración debida a la gravedad y la presión en la superficie del agua es cero. Esta relación puede ser aplicada al agua en el interior del

tubo en la pregunta de la Sección 24. Si usted no está familiarizado con la ley de Pascal, antes de continuar con el programa, le será útil leer conceptos de hidrostática presentados en textos de física.

Regrese a la Sección 24 y elija otra respuesta.

19.

Su respuesta en la Sección 26 es incorrecta. Energía potencial es un término escalar y cuando recibe contribuciones de diferentes fuentes, éstas son simplemente añadidas para obtener la energía potencial total. La energía potencial de la unidad de peso del agua debida a su elevación es z , mientras que la energía potencial debida a las fuerzas

ejercidas sobre el punto por el agua en las cercanías es h_p .

Regrese a la Sección 26 y elija otra respuesta.

20.

Su respuesta en la Sección 6 es incorrecta. La línea AB , es obviamente, la distancia más corta entre dos puntos y no existen líneas de flujo más cortas que esta distancia.

Regrese a la Sección 6 y elija otra respuesta.

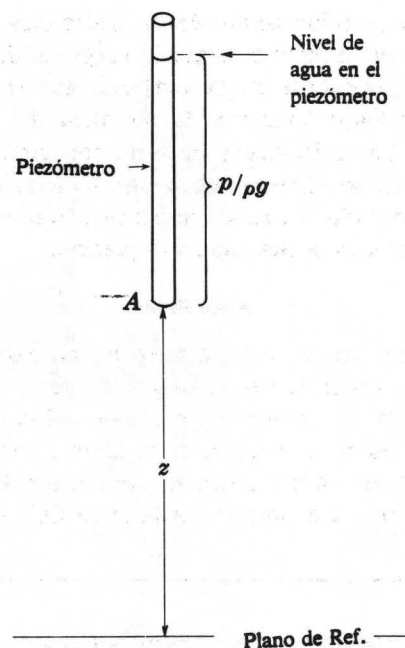
21.

Su respuesta en la Sección 26 es correcta. La unidad de peso del agua tiene energía potencial causada por su elevación y las fuerzas ejercidas sobre ella por el fluido que la rodea. La energía potencial debida a su elevación es z y a la energía potencial ocasionada por la fuerzas ejercidas sobre ella por el fluido circundante es $p/\rho g$ ó h_p . La suma de z y h_p en el punto de interés es evidentemente la carga h (como se usa en la hidráulica de aguas subterráneas). Los dos términos que configuran la carga en un punto—la elevación del punto sobre un plano de referencia y la elevación de la parte superior de una columna estática de agua que pueda ser sostenida sobre el punto—midien respectivamente las dos formas de energía potencial hidráulica por unidad de peso. Su suma indica la energía potencial hidráulica total por unidad de peso del fluido en el punto.

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones indica la energía potencial hidráulica total de una unidad de volumen de fluido en la cercanía del punto A en el diagrama?

22.



Pase a la Sección:

| | |
|----------------|----|
| $p + \rho g z$ | 8 |
| $p + z$ | 5 |
| $p/\rho g + z$ | 27 |

Su respuesta en la Sección 26 es incorrecta. z representa la energía potencial de una unidad de peso de agua próxima al punto 0, debida a su ele-

23.

vación sobre el plano de referencia. Una unidad de peso de agua cercana a este punto tendrá también energía potencial ejercida sobre ella por las fuerzas del fluido que la rodean. La pregunta pedía la energía potencial hidráulica total.

Regrese a la Sección 26 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 14 es correcta. La carga consta de 2 términos en sistemas de aguas subterráneas: la elevación del punto mismo sobre

24.

el plano de referencia y la altura de la columna estática de agua que puede ser sostenida sobre este punto. En este caso, la columna de agua en el piezómetro es la columna estática sobre el punto.

La altura de la columna de agua sobre el punto es una medida de la presión en este punto y es algunas veces denominada como presión de carga.

Lectores familiarizados con la hidráulica de flujo libre pueden reconocer que la carga definida aquí se distingue de la carga total utilizada en hidráulica de flujo libre por la ausencia del término, $v^2/2g$. Las velocidades de flujo son generalmente pequeñas en sistemas de aguas subterráneas y el término, $v^2/2g$, es casi siempre insignificante en comparación con la elevación y la presión.

PREGUNTA

Asuma que un tubo abierto en sus extremos es introducido en la tierra. La parte inferior del tubo se asienta en un punto por debajo del nivel hidrostático donde la presión es p . Dentro del tubo el agua se eleva a una altura h_p por encima de la base del mismo. La presión en la superficie del agua

dentro del tubo (la presión atmosférica) se considera igual a cero. La altura de la columna de agua dentro del tubo, a partir del extremo inferior del tubo se obtiene por la expresión:

Pase a la Sección:

| | |
|------------------|----|
| $h_p = p/\rho g$ | 16 |
| $h_p = g/\rho p$ | 25 |
| $h_p = \rho g$ | 19 |

donde ρ es la densidad del agua, o masa por unidad de volumen, y g es la constante gravitacional.

Con.—24.

Su respuesta en la Sección 24 es incorrecta. La presión dentro de un cuerpo estático de agua varía de acuerdo a la Ley de Pascal, la cual puede ser expresada $p = \rho g d$ donde ρ es la densidad de masa del agua, g es la aceleración debida a la gravedad, y d es la profundidad por debajo del punto donde la presión es medida. La presión en la superficie superior del agua (algunas veces denominada p_0 en textos de hidráulica) se considera aquí ser cero. Si usted no está familiarizado con esta relación, antes de proseguir con el programa,

le será conveniente repasar un texto de física que trate la hidrostática.

En el problema de la Sección 24, la columna de agua en el tubo es estática y la Ley de Pascal podría ser utilizada para determinar la presión en cualquier punto dentro de la columna, aún en su base, donde se une al sistema de aguas subterráneas.

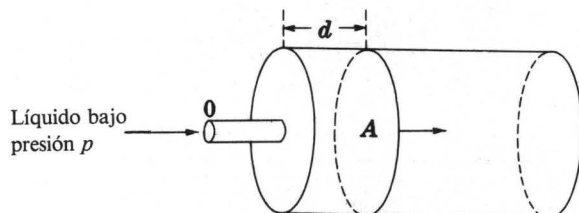
Regrese a la Sección 24 y elija otra respuesta.

25.

Su respuesta en la Sección 16 es correcta. La presión puede ser considerada como energía potencial por unidad de volumen del líquido. Físicamente, este concepto es tal vez más fácilmente apreciado utilizando el ejemplo de un cilindro hidráulico o prensa hidráulica mostrado esquemáticamente en el diagrama. Se inyecta líquido a presión p a través de un orificio en O. La inyección del líquido produce desplazamiento del pistón hacia la derecha. La presión es una medida de fuerza por unidad de área; por lo tanto, la fuerza total sobre el pistón se obtiene por el producto de la presión p y

26.

el área frontal del pistón denominado A . Entonces, $F = p \times A$ donde, F es la fuerza sobre el pistón.



El trabajo producido al mover el pistón se determina por el producto de la fuerza y la distancia sobre la cual actúa. Si el pistón se mueve una distancia d , el trabajo realizado será

$$W = F \times d = p \times A \times d,$$

donde W es el trabajo producido al mover el pistón. El producto $A \times d$ es el volumen del fluido en el cilindro al final del trabajo; entonces podríamos decir que este volumen de líquido es capaz de realizar este trabajo W , cuando está sometido a una presión p .

Energía potencial es a menudo expresada como la habilidad de realizar un trabajo. Es decir, si un sistema es capaz de realizar 10 pies-libras de trabajo, entonces decimos que posee una energía potencial de 10 pies-libras. En el caso del cilindro, la energía potencial asignada depende de la distancia de recorrido del pistón. Si $d = 5$, entonces $W = p \times 5A$; para $d = 10$, $W = p \times 10A$. En este caso, la energía potencial no puede ser determinada directamente de los conceptos anteriores debido a que la distancia de desplazamiento del pistón, ó equivalentemente el volumen del fluido inyectado en el cilindro a presión p , deberá ser especificada antes de determinar la energía potencial necesaria. En este caso, es más conveniente considerar la energía potencial por unidad de volumen de líquido. Por ejemplo, si nos indican que la energía potencial es 10 pies-libras por pie cúbico de agua en el cilindro, podremos calcular la energía potencial asociada con la inyección de cualquier volumen específico del fluido al cilindro. El trabajo que puede producirse si un volumen $A \times d$ de un líquido es admitido es $p \times A \times d$; dividiendo esta expresión por el volumen $A \times d$ se obtiene el

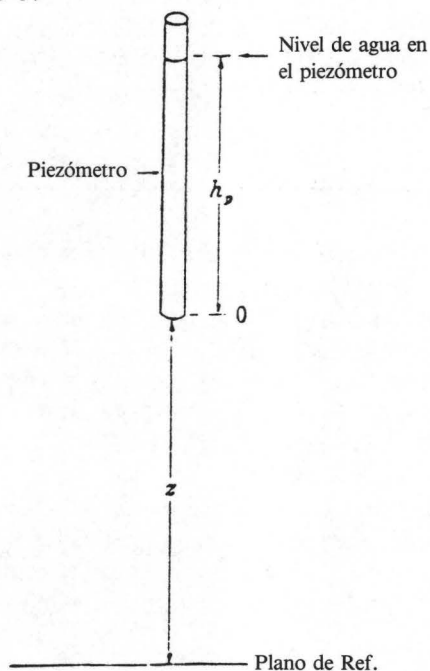
trabajo que se puede efectuar por unidad de volumen del líquido, es decir la energía potencial por unidad de volumen de líquido. Esta energía potencial por unidad de volumen es entonces la presión p , bajo la cual el fluido es admitido en el cilindro.

Este concepto de presión como energía potencial por unidad de volumen puede ser extendido a sistemas generales de flujo, siempre que entendamos que esta energía potencial es únicamente aquella causada por las fuerzas que actúan sobre un elemento fluido por el líquido que le rodea. Para obtener la energía potencial total, tendremos que añadir la energía potencial debida a la fuerza de gravedad que actúa directamente sobre el elemento fluido.

Si la presión, que representa la energía potencial por unidad de volumen, se divide por ρg , peso por unidad de volumen, obtendremos $p/\rho g$ —ó simplemente h_p , la altura de la columna estática de agua sobre este punto—como la energía potencial por unidad de peso debida a las fuerzas ejercidas por el fluido que la rodea.

PREGUNTA

Refiriéndose al diagrama. ¿cual de las siguientes expresiones dará la energía hidráulica potencial total de una unidad de peso de agua situada cerca del punto 0?



Pase a la Sección:

26. — Con.

| | |
|-----------|----|
| z | 23 |
| $h_p + z$ | 22 |
| $h_p - z$ | 20 |

Su respuesta en la Sección 22 es incorrecta. Ya hemos visto que $p/\rho g + z$ es igual a la energía potencial total por unidad de peso de agua. Para obtener la energía potencial por unidad de volumen, debemos multiplicar por el peso por unidad de volumen.

Regrese a la Sección 22 y elija otra respuesta.

27.

Su respuesta en la Sección 3 es incorrecta. El cociente, Q/A , daría una velocidad promedio si consideramos flujo en cauce libre. Sin embargo, aquí A no es el área de sección transversal de flujo; sino, el área de sección transversal del bloque poroso perpendicular al flujo. Solamente una fracción de esta área que consta de los espacios porosos abiertos puede ser considerada área seccional de flujo. Supongamos, por ejemplo, que esta área de poros

representa 20 por ciento del área total, A , el área de flujo será entonces $0.2 A$.

Regrese a la Sección 3 y elija otra respuesta.

28.

Su respuesta en la Sección 9 es incorrecta. El volumen de espacios porosos interconectados es 0.20 pies cúbicos. Pero como la saturación no es del 100 por ciento, el volumen de agua en el espécimen no puede ser igual al volumen de espacios porosos interconectados. Observe que estamos expresando saturación como porcentaje de espacios porosos interconectados.

Regrese a la Sección 9 y elija otra respuesta.

29.

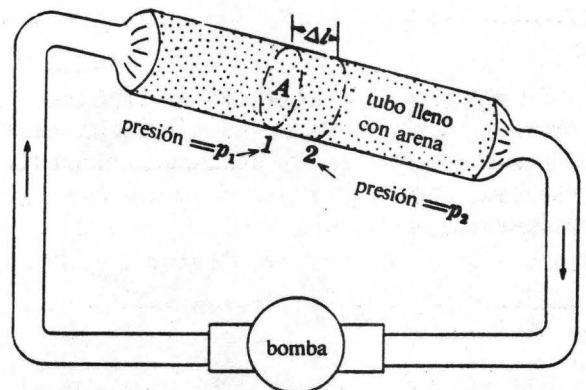
Parte II. La Ley de Darcy

Introducción

La Parte II presenta un desarrollo de la Ley de Darcy. Esta ley relaciona el caudal específico, o descarga por unidad de área a la gradiente de carga hidráulica. Esta es la relación fundamental que rige el flujo continuo en medios porosos. Este desarrollo no debe ser considerado como una deri-

vación rigurosa, sino como un argumento razonable, presentado al lector para proporcionarle algunas apreciaciones del significado físico de esta relación. A continuación de la Parte II del programa se exponen algunas consideraciones breves en forma de texto sobre la Ley de Darcy.

En mecánica, cuando se considera el movimiento continuo de una partícula, es común igualar las fuerzas que producen el movimiento a las fuerzas de fricción que se le oponen. Este mismo procedimiento se puede aplicar al movimiento continuo del fluido a través de un medio poroso. Cuando estudiamos el movimiento de una partícula sólida en un fluido, descubrimos que la fuerza de fricción opuesta al movimiento es proporcional a la velocidad de la partícula. Asimismo, cuando se trata de flujo en un medio poroso, asumiremos que las fuerzas de fricción opuestas al flujo son proporcionales a la velocidad del fluido. Nuestro objetivo será entonces, encontrar expresiones para las fuerzas que impulsan el flujo e igualar las mismas a las fuerzas friccionales opuestas al flujo, las cuales serán consideradas proporcionales a la velocidad. A la suma vectorial de las fuerzas que producen y que resisten el flujo se le dará el valor de cero. Ya que el movimiento del fluido es constante—es decir, que no se observa aceleración alguna—las fuerzas que actúan sobre el fluido deberán estar en equilibrio. Por eso, la suma vectorial es igual a cero en todos los puntos. La ecuación obtenida por medio de este equilibrio de fuerzas será una representación de la Ley de Darcy. Empezamos considerando las fuerzas que ocasionan el flujo.



PREGUNTA

Supongamos tener un tubo lleno de arena, según se indica en la figura. La porosidad de la arena es n . Un líquido de densidad ρ es circulado a través del tubo impulsado por una bomba. Las líneas de puntos indican un pequeño segmento cilíndrico de longitud Δl , y de sección de área transversal A que es igual a la del tubo. Un volumen pequeño; o elemento del líquido en movimiento ocupa este segmento. La presión del fluido en el punto 1, en el extremo superior del segmento es p_1 .

¿Cuál de las siguientes expresiones representará mejor la fuerza ejercida sobre el área superior del segmento por el elemento fluido adyacente?

(1)

Pase a la Sección:

| | |
|-----------|----|
| $P_1 A$ | 25 |
| $p_1 n A$ | 8 |
| $p_1 Q g$ | 16 |

Con.—(1)

Su respuesta en la Sección 19

$$-\frac{1}{k} \mu Q (\Delta l \cdot n \cdot A),$$

es incorrecta. Asumimos que la fuerza de fricción retardante sería de alguna manera proporcional a la viscosidad dinámica (μ), al volumen del fluido en el elemento ($\Delta l \cdot n \cdot A$), y al caudal específico, o flujo por unidad de área (Q/A). Aunque la respuesta que usted eligió es compatible con tal hipótesis, no es

lo suficientemente adecuada como lo es una de las otras respuestas. Su respuesta supone que las fuerzas retardantes son proporcionales con más particularidad al caudal total, Q , que al caudal específico, Q/A .

Regrese a la Sección 19 y elija otra respuesta.**(2)**

Su respuesta en la Sección 26 es incorrecta. El término $\Delta l \cdot n \cdot A$ da el volumen del fluido en el elemento; la pregunta pide la masa del fluido en el elemento. Observe que la densidad del fluido, ρ , representa su masa por unidad de volumen.

Regrese a la Sección 26 y elija otra respuesta.**(3)**

Su respuesta en la Sección 35 es incorrecta. Obviamente, el término $\sqrt{(\Delta z)^2 \times (\Delta x)^2}$ es igual a Δl , así que la respuesta que eligió es equivalente al término $\rho \cdot n \cdot A \cdot g \cdot \Delta l$. Pero como vimos en la Sección 15, este término da la magnitud de la fuerza gravitacional *total* en nuestro elemento líquido; lo que queremos es una expresión para el *componente* de esta fuerza total en la dirección del flujo. Hemos visto que este componente se da por

la expresión $\rho \cdot n \cdot A \cdot g \cdot \Delta l \cdot \cos \gamma$; el propósito de esta pregunta es encontrar un término equivalente a $\cos \gamma$ y sustituirlo en la expresión anterior.

Regrese a la Sección 35 y elija otra respuesta.**(4)**

Su respuesta en la Sección 31,

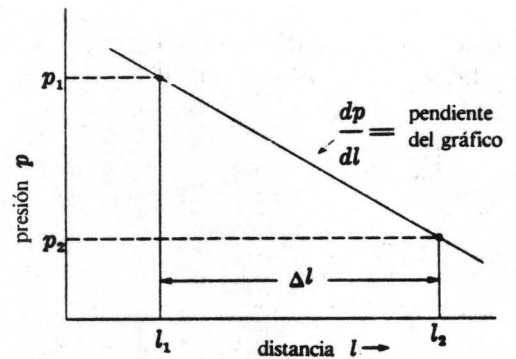
$$\frac{dp}{dl} n A,$$

es incorrecta. La expresión previamente obtenida para la fuerza neta fue $(p_1 - p_2)nA$ ó $-\Delta p n A$.

Usted ha sustituido la *gradiente* de presión, o la variación de presión por pie, por el pequeño *cambio* de presión, $-\Delta p$. Para obtener un cambio

(5)

neto, o incremento, de una gradiente, o proporción de cambio por unidad de distancia, debemos multiplicar la razón por unidad de distancia por la distancia sobre la cual ocurre el cambio. Por ejemplo, dp/dl en la figura representa la pendiente de un gráfico de presión, p , versus distancia, l . Para obtener el cambio de presión, $p_2 - p_1$, debemos multiplicar esta pendiente por la longitud del intervalo, Δl . Debido a que en realidad necesitamos la cantidad $p_1 - p_2$, debemos introducir un signo negativo (en la figura, p_1 es mayor que p_2 —es decir, la presión disminuye en la dirección del flujo, l . La derivada dp/dl es por lo tanto una cantidad intrínsecamente negativa. Introduciendo otro signo negativo, obtendremos un resultado positivo para el término $p_1 - p_2$).

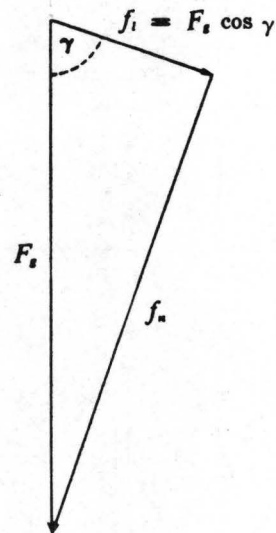


$$p_1 - p_2 = \text{cambio de presión, } \Delta p = \frac{dp}{dl} \times \Delta l$$

Regrese a la Sección 31 y elija otra respuesta.

(5)—Con.

Su respuesta en la Sección 33 es incorrecta. El término $\rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g$ representa la magnitud del vector de la fuerza gravitacional total, F_g . Sin embargo, necesitamos el componente de este vector de fuerza en la dirección l debido a que únicamente este componente es efectivo para producir flujo a lo largo del tubo. En la figura con los tres vectores, la longitud de la flecha que representa la fuerza gravitacional, F_g , es proporcional a la magnitud de esa fuerza, y las longitudes de las flechas que representan los dos componentes, f_l y f_n , son proporcionales a las magnitudes de esos componentes. Utilizando un diagrama que muestra la descomposición de un vector en sus componentes se hace más fácil formarse una imagen de la siguiente regla general: la magnitud del componente de un vector en una dirección dada se obtiene multiplicando la magnitud del vector por el coseno del ángulo entre la dirección del vector y la dirección en la cual se toma el componente.



Regrese a la Sección 33 y elija otra respuesta.

(6)

Su respuesta en la Sección 28,

$$\frac{Q}{A} = -K \frac{dh}{dl},$$

es correcta. Esta relación entre caudal específico y gradiente de carga, o gradiente hidráulica, dh/dl fue obtenida experimentalmente por Henry Darcy (1856) y se conoce como la Ley de Darcy para flujo en medios porosos. La constante K , como es comúnmente usada en el Servicio Geológico de los E.E.U.U., es denominada conductividad hidráulica y tiene dimensiones de velocidad. También en esta organización, la constante k es denominada permeabilidad intrínseca; sus dimensiones son (longitud)² y sus unidades dependen de las unidades de densidad y viscosidad empleadas. Para su uso en el Servicio Geológico de los E.E.U.U., donde q se mide en kg/m^3 , g se mide en m/s^2 , y μ en $\text{kg}/(\text{ms})$, k tendría unidades de m^2 .

Como se observa en la Sección 28, la conductividad hidráulica, K , está relacionada con la permeabilidad intrínseca k , mediante la ecuación

$$K = k \frac{\rho g}{\mu}$$

en la cual ρ es la densidad del fluido, μ es la viscosidad dinámica del fluido y g es la constante gravitacional. De este modo la conductividad hidráulica incorpora dos propiedades del fluido y por lo tanto no puede ser considerada una propiedad del medio poroso por sí sola. Por otra parte, la permeabilidad intrínseca es comúnmente considerada como una propiedad única del medio poroso. En sistemas de aguas subterráneas, las variaciones en densidad son generalmente asociadas con las variaciones en el contenido de minerales disueltos en el agua, mientras que las variaciones en la viscosidad se

deben generalmente a cambios en la temperatura. Entonces es preferible utilizar la permeabilidad intrínseca en caso que impliquen variaciones significativas del contenido mineral o de la temperatura del agua.

Toda la teoría de flujo continuo en medios porosos esta basada en la Ley de Darcy. Para el trato de movimiento en tres dimensiones esta ley puede ser expresada en términos más generales. Algunos de estos son considerados en la discusión tipo texto al final de este capítulo. El desarrollo presentado en este capítulo implica numerosas hipótesis arbitrarias y por lo tanto no debe ser considerado como una derivación teórica de la Ley de Darcy. Sirve únicamente para ilustrar, en forma general, el significado físico de los términos que se presentan en la ley.

PREGUNTA

Analice las siguientes proposiciones:

- (a) El agua subterránea fluye de elevaciones más altas a elevaciones más bajas.
- (b) El agua subterránea fluye en la dirección en que disminuye la presión.
- (c) El agua subterránea se mueve en la dirección en que disminuye la carga.

De acuerdo a la Ley de Darcy tal como se expone en este capítulo, ¿cuál de estas afirmaciones se deberían considerar correctas?

Pase a la Sección:

| | |
|-----------------------|----|
| Las tres | 29 |
| (b) y (c) pero no (a) | 13 |
| solamente (c) | 21 |

(7)

Su respuesta, $p_1 n A$, en la Sección 1 es correcta. El área total de la sección de la cara superior (agua arriba) del segmento es A . Si suponemos que la relación entre el área del fluido y el área total es igual a la porosidad, el área del fluido de la cara superior es nA . Entonces la presión, o fuerza por unidad de área, multiplicada por el área del fluido nos da la fuerza total en el elemento del fluido a través de la cara superior. Similarmente, si p_2 es la presión del

fluido en la cara inferior (agua abajo), $p_2 n A$ nos da la magnitud de la fuerza ejercida por el elemento adyacente sobre esa cara inferior del elemento del fluido.

(8)

PREGUNTA

Pase a la Sección:

Supongamos que la presión p_1 es mayor que la presión p_2 . ¿Cuál de las siguientes expresiones sería la mejor representación de la fuerza neta de presión sobre el elemento en la dirección del flujo?

| | |
|-----------------------|----|
| $p_1 nA + p_2 nA$ | 23 |
| $(p_1 nA + p_2 nA)/2$ | 12 |
| $p_1 nA - p_2 nA$ | 31 |

(8)—Con.

Su respuesta en la Sección 28 es incorrecta. Observamos en la Parte I que la carga, h , se dió por

$$h = \frac{p}{\rho g} + z.$$

(9)

Por consiguiente

$$\frac{dh}{dl} = \frac{d(p/\rho g)}{dl} + \frac{dz}{dl}.$$

Utilice esta expresión para elegir otra respuesta a la pregunta de la Sección 28.

Su respuesta en la Sección 11 es incorrecta. Hemos obtenido expresiones para dos fuerzas actuando en la dirección del flujo—la fuerza neta de presión, que fue calculada como la diferencia entre las fuerzas ejercidas por elementos del fluido adyacente sobre las caras superior e inferior del elemento (ver Sección 26) y el componente de la

fuerza gravitacional en la dirección del flujo (ver Sección 11). La pregunta requiere la fuerza neta combinada debida a la presión y gravedad. Las fuerzas se combinan por medio de sumas vectoriales. En este caso, sin embargo, la fuerza neta de presión y el componente de gravedad que consideramos están orientados en la misma dirección—en la dirección del flujo. En este caso la suma vectorial pasa a ser una simple suma de las magnitudes de los dos términos.

Regrese a la Sección 11 y elija otra respuesta.

(10)

Su respuesta,

$$\rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g \frac{\Delta z}{\Delta l},$$

en la sección 35 es correcta. $\Delta z/\Delta l$ es el equivalente de $\cos \gamma$ y solamente indica el cambio en elevación por unidad de distancia *a lo largo de la línea de flujo*. (O sea que no es lo mismo que la pendiente la cual por definición es el cambio en elevación por unidad de distancia horizontal.) En notación

de cálculo, $\Delta z/\Delta l$ se representaría por la derivada, dz/dl , implicando el valor limitante de la relación $\Delta z/\Delta l$ cuando se toman valores más pequeños de Δl . Si z disminuye en la dirección del flujo—o sea, si dz/dl es negativa, el componente de la fuerza a lo largo del tubo deberá ser positivo u orientado en la dirección del flujo. Si z aumenta en la dirección del flujo, o sea, si dz/dl es positiva, esta fuerza deberá ser negativa u orientada contra el flujo. Por lo tanto introducimos un signo negativo así finalmente tendremos

$$f_i = -\rho \cdot n \cdot A \cdot \Delta l \cdot g \cdot \frac{dz}{dl},$$

(11)

donde f_i es el componente de la fuerza gravitacional paralelo al tubo como en la Sección 33. La fuerza total que impulsa el flujo es la suma de este componente gravitacional y la fuerza de presión.

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones daría la fuerza neta sobre el fluido, causada por la presión y la gravedad?

Pase a la Sección:

$$\left(-\frac{dp}{dl} - \rho g \frac{dz}{dl} \right) \Delta l \cdot n \cdot A \quad 19$$

$$-\frac{dp}{dl} \cos \gamma + \rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g \cdot \frac{dz}{dl} \quad 24$$

$$-\rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g \cdot \frac{dz}{dl} - \frac{dp}{dl} \quad 10$$

Con.—(11)

Su respuesta en la Sección 8 es incorrecta. La expresión $(p_1 n A + p_2 n A)/2$ será aproximadamente igual a la fuerza en la dirección del flujo para una sección de área transversal tomada en el punto medio de nuestro elemento líquido. Su respuesta no proporciona la fuerza neta sobre el mismo elemento en la dirección del flujo.

El elemento del fluido se extiende a lo largo del tubo por una distancia corta. Sobre esta distancia, la presión disminuye de p_1 en la cara superior (agua arriba) a p_2 en la cara inferior (agua abajo). La fuerza sobre el elemento en la cara superior (agua arriba) es la fuerza que actúa en la dirección del flujo; la fuerza sobre el elemento en la cara inferior es la fuer-

za que actúa contra la dirección del flujo. Es decir, una fuerza de contención del fluido adjacente contra el elemento fluido que consideramos. Su magnitud se da nuevamente como un producto de la presión, la porosidad y el área de la cara, $p_2 n A$, pero ahora introducimos un signo negativo para explicar el hecho que esta fuerza actúa en oposición a la fuerza previamente considerada. La fuerza neta en la dirección de flujo se obtiene por la suma algebraica de las dos fuerzas.

Regrese a la Sección 8 y elija otra respuesta.

(12)

Su respuesta en la Sección 7 es incorrecta. El agua subterránea percola del nivel del agua hacia abajo. La presión es mayor en profundidad que al nivel del agua, así que en estos casos el agua se mueve en la dirección hacia donde la presión aumenta. Observe que la Ley de Darcy relaciona

flujo por unidad de área a la gradiente de carga, no a la gradiente de presión.

Regrese a la Sección 7 y elija otra respuesta.

(13)

Su respuesta en la Sección 31 es incorrecta. Hemos visto que la fuerza neta de la presión es igual a $-\Delta p n A$. Su respuesta no puede ser igual a esta fuerza y a $\Delta p (dp/dl) n A$ (a menos que dp/dl sea igual a -1 , en un caso particular).

Deseamos sustituir una expresión que incluya la derivada, dp/dl , en lugar del término de cambio de presión, $-\Delta p$. Para obtener una expresión para un cambio, o un incremento de una derivada, es necesario multiplicar la derivada—o sea, la pro-

porción de cambio por unidad de distancia—por la distancia sobre la cual el incremento o cambio ocurre. Por ejemplo, el diagrama muestra un gráfico de la presión versus la distancia. La pendiente de este gráfico es la derivada, dp/dl . Si deseamos obtener el cambio en la presión $p_2 - p_1$ producido

(14)

sobre el intervalo Δl , tendremos que multiplicar la magnitud del cambio por unidad de distancia dp/dl , por la distancia Δl . Como realmente necesitamos la parte negativa de esta cantidad, $p_1 - p_2$, introducimos el signo negativo. (Como se observa en el gráfico, p_1 es mayor que p_2 —la presión decrece en la dirección del flujo, l . La derivada de la presión con respecto a la distancia, dp/dl , es por lo tanto una cantidad negativa de por sí—o sea que el gráfico tiene una pendiente negativa. Incluyendo otro signo negativo, obtendremos un resultado positivo para el término $p_1 - p_2$.)

(14)—Con.

Su respuesta, $m = \rho \cdot \Delta l \cdot n \cdot A$, en la Sección 26 es correcta. El producto de la densidad de masa ρ , multiplicado por el volumen de fluido, $n \cdot \Delta l \cdot A$, donde n es la porosidad, produce la masa del fluido. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza total de gravedad en el elemento líquido será $\rho \cdot \Delta l \cdot n \cdot A \cdot g$. Esta fuerza gravitacional actúa verticalmente hacia abajo. Sin embargo, fuerza es una cantidad vectorial y como tal puede ser descompuesta en dos componentes actuando en otras direcciones.

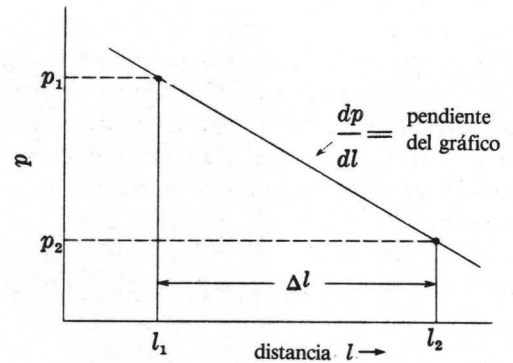
PREGUNTA

La figura muestra nuevamente el sistema de flujo que hemos postulado. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(15)

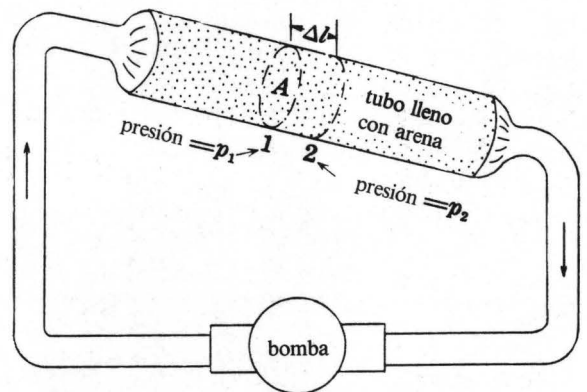
Su respuesta en la Sección 1 es incorrecta. La fuerza sobre el elemento será producida por la presión, o fuerza por unidad de área, multiplicada

(16)



$$p_1 - p_2 = \text{cambio de presión, } \Delta p = \frac{dp}{dl} \times \Delta l$$

Regrese a la Sección 31 y elija otra respuesta.



Pase a la Sección:

- | | |
|--|----|
| La fuerza gravitacional total produce flujo a lo largo del tubo. | 22 |
| Sólo el componente de la fuerza gravitacional paralelo al eje del tubo contribuye al flujo a lo largo del mismo. | 33 |
| Sólo el componente horizontal de la fuerza gravitacional contribuye al flujo a lo largo del tubo. | 18 |

por el área del fluido contra el cual se ejerce la presión.

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

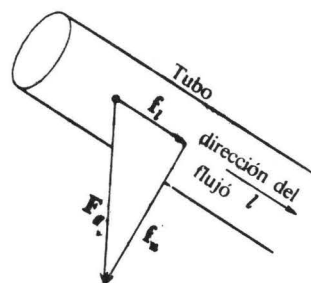
Su respuesta en la Sección 26 es incorrecta. El término, $\rho \cdot \Delta l \cdot A$, daría la masa de un elemento fluido de volumen $\Delta l \cdot A$. Sin embargo, en nuestro problema, solamente una parte del volumen $\Delta l \cdot A$ es ocupado por el fluido; el remanente es ocupado por gránulos sólidos de arena, por lo tanto el volumen real del fluido es menor que $\Delta l \cdot A$.

Regrese a la Sección 26 y elija otra respuesta.

(17)

Su respuesta en la Sección 15 es incorrecta. La gravedad, como la consideramos, no tiene componente horizontal. Ningún vector puede tener un componente perpendicular a su propia dirección. En nuestro caso consideramos que el vector de fuerza gravitacional, F_g , está siempre dirigido verticalmente hacia abajo, entonces no puede haber componente horizontal para esta fuerza.

La figura muestra el vector fuerza gravitacional descompuesto en dos fuerzas—una paralela a la dirección del flujo, f_i , y otra perpendicular a la dirección del flujo, f_n . La velocidad misma del fluido puede ser considerada un vector. Como tal, no tiene componente en la dirección de f_n , perpendicular al tubo—y un componente de fuerza



perpendicular al tubo no podría contribuir en forma alguna a la velocidad del fluido.

Regrese a la Sección 15 y elija otra respuesta.

(18)

Su respuesta en la Sección 11,

$$-\left(\frac{dp}{dl} - \rho g \frac{dz}{dl}\right) \Delta l \cdot n \cdot A,$$

es correcta. La fuerza neta por unidad de volumen del fluido causada por la presión y gravedad sería

$$-\left(\frac{dp}{dl} + \rho g \frac{dz}{dl}\right),$$

puesto que $\Delta l \cdot n \cdot A$ da el volumen del elemento fluido.

Nuestra intención en este desarrollo es igualar la fuerza neta que induce el flujo a la fuerza de fricción que lo resiste. Lo que haremos es obtener la suma vectorial de estas fuerzas opuestas y la igualaremos a cero. La ecuación resultante será una expresión de la Ley de Darcy. Hemos obtenido una expresión para la fuerza neta que produce flujo. Ahora consideramos la fuerza opuesta al movimiento. Esta fuerza es causada principal-

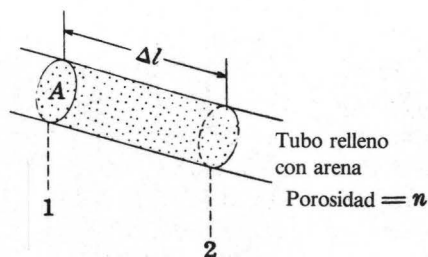
mente por la fricción entre el fluido en movimiento y el medio poroso. En algunos sistemas de la mecánica—por ejemplo en el caso de una partícula moviéndose a través de un líquido viscoso a una velocidad moderada—la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad de movimiento. Por analogía asumimos una relación similar válida para nuestro elemento del fluido. Sin embargo, como se indica en la Parte I, la velocidad real (poro) varía de un punto a otro y es difícil o imposible de determinar. Entonces, para ser prácticos consideramos que la fuerza friccional en nuestro elemento líquido es proporcional a la descarga específica, o flujo por unidad de área de sección transversal a través del material poroso. (Ver la Sección 14, Parte I.) La descarga específica que tiene dimensiones de velocidad (y entonces aparenta ser una forma de velocidad), es determinada por la distribución estadística de las velocidades en

(19)

los poros dentro del elemento fluido. Por esto estamos en efecto asumiendo que la fuerza total de fricción sobre este elemento es determinada del mismo modo por la distribución estadística de las velocidades en los poros. Además, asumimos que la fuerza total de fricción en el elemento del fluido es proporcional al volumen del fluido en el elemento, si suponemos que el área total de contacto sólido-fluido dentro del elemento y por lo tanto la fuerza de fricción sobre el mismo aumenta en proporción a su volumen. Finalmente, asumimos que la fuerza de retardo es proporcional a la viscosidad dinámica del fluido, puesto que se espera que un fluido de baja viscosidad pase más fácilmente a través de un medio poroso que un líquido de alta viscosidad.

PREGUNTA

Siguiendo las diferentes consideraciones explicadas anteriormente, ¿cuál de las siguientes expresiones elegiría como la más representativa de las fuerzas de fricción sobre el elemento fluido de la Sección I (descrito nuevamente en el diagrama)



Pase a la Sección:

$$-\frac{1}{k} \mu Q (\Delta l \cdot n \cdot A) \quad 2$$

$$-\frac{1}{k} \cdot \frac{Q^2 \mu}{\Delta l \cdot n \cdot A} \quad 34$$

$$-\frac{1}{k} \mu (\Delta l \cdot n \cdot A) \frac{Q}{A} \quad 20$$

donde $1/k$ indica una constante de proporcionalidad; μ es la viscosidad dinámica del fluido, y Q es la descarga a través del tubo.

(19)—Con.

Su respuesta en la Sección 19,

$$-\frac{1}{k} \mu (\Delta l \cdot n \cdot A) \frac{Q}{A},$$

es correcta. El signo negativo se emplea para indicar que la fuerza de fricción retardante actuará en dirección opuesta al movimiento del fluido. Suponemos que el movimiento del fluido es uniforme—o sea, que la velocidad del fluido no cambia con el tiempo. En otras palabras, no existe aceleración en este movimiento. Bajo estas condiciones, las fuerzas que producen el movimiento deberán estar en equilibrio con las fuerzas retardantes de fricción. La suma vectorial de estas fuerzas deberá por lo tanto ser igual a cero. Debido a que los componentes de fuerza que contribuyen al movimiento están orientados a lo largo del tubo, esta suma es simplemente una suma algebraica.

(20)

PREGUNTA

Hemos observado que la fuerza neta que actúa e impulsa el elemento líquido—o se, la fuerza neta en la dirección del flujo debido tanto a la presión como a la gravedad—se da por

$$-\left(\frac{dp}{dl} + \rho g \frac{dz}{dl} \right) \Delta l \cdot n \cdot A.$$

Supóngase que tomamos la suma algebraica de esta fuerza y la fuerza retardante e igualamos esta suma a cero. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones podrá ser establecida a causa de este resultado?

Pase a la Sección:

$$\frac{dp}{dl} + \rho g \frac{dz}{dl} + \frac{\mu}{k} \cdot \frac{Q}{A} = \Delta l \cdot n \cdot A \quad 36$$

$$-\frac{k}{\mu} \left(\frac{dp}{dl} + \rho g \frac{dz}{dl} \right) = \frac{Q}{A} \quad 28$$

$$\left(\frac{dp}{dl} + \rho g \frac{dz}{dl} \right) \Delta l \cdot n \cdot A = \frac{\mu}{k} \frac{Q}{A} \quad 27$$

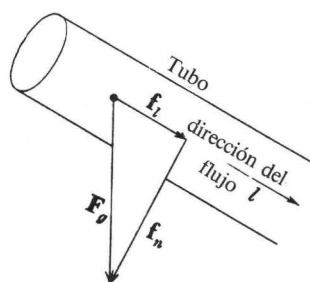
Su respuesta en la Sección 7 es correcta. La Ley de Darcy, como una ecuación que contiene una derivada, es en realidad una ecuación diferencial. Relaciona flujo por unidad de área a la energía consumida por unidad de distancia por fricción. Se pueden reconocer analogías entre la Ley de Darcy y las ecuaciones diferenciales que rigen el flujo constante de electricidad o calor. La conductividad hidráulica, K , es semejante a las conductividades eléctrica o térmica; mientras que el potencial hidráulico, h , es un potencial similar a la temperatura o al voltage. (Para ser más preciso, el término

Kh constituye un potencial de velocidad del agua subterránea—es decir, una función cuya derivada produce la velocidad del flujo—siempre que el fluido y el medio poroso sean ambos homogéneos y que el medio sea isotrópico.)

Aquí termina el programa de la Parte II. Consideraciones en forma de texto en relación a las generalizaciones de la Ley de Darcy comienzan a continuación de la Sección 37.

(21)

Su respuesta en la Sección 15 es incorrecta. El diagrama muestra el vector fuerza gravitacional, F_g , descompuesto en dos fuerzas, una paralela a la dirección del flujo, f_i , y la otra perpendicular a la misma, f_n . Si el flujo fuera vertical hacia abajo, es decir colinear con F_g , la fuerza gravitacional total podría producir flujo. Sin embargo, en esta situación, un componente de la fuerza gravitacional, f_n , o aquel perpendicular al flujo, es anulado por las fuerzas estáticas ejercidas por las paredes del tubo. Tomando otro punto de vista, podemos observar que la velocidad del flujo misma es un vector en la dirección l . Ningún vector puede tener un componente perpendicular a su propia dirección, así que el vector velocidad no tiene componente en la dirección de f_n . Dicha fuerza por lo tanto, no puede contribuir a la



velocidad del fluido.

Regrese a la Sección 15 y elija otra respuesta.

(22)

Su respuesta en la Sección 8 es incorrecta. La presión en un punto del fluido es una cantidad escalar, no tiene carácter direccional y decimos que “actúa en todas las direcciones”. Sin embargo, si escogemos cualquier sección de área transversal pequeña dentro del fluido, podemos medir una fuerza contra esta área atribuible a la presión, sin relación a la orientación del área. Esta fuerza es un vector, o sea una cantidad dirigida; actúa en dirección perpendicular al área pequeña y tiene una dimensión igual al producto de la presión por el área. En el ejemplo de las Secciones 1 y 8, consideramos la presión en dos puntos, en las caras superior y inferior del fluido. En la cara superior se escribe una expresión $p_1 nA$ para la magnitud de la fuerza en la dirección del flujo. En la

cara inferior estamos interesados en una fuerza en contra del flujo—es decir, que actúa en dirección opuesta al flujo. La magnitud de esta fuerza es nuevamente obtenida como un producto de la presión, la porosidad y el área de la cara $p_2 nA$; pero como estamos interesados en la fuerza que actúa contra el flujo, o en la dirección opuesta a la fuerza original, introducimos un signo negativo. La fuerza neta en el elemento fluido a lo largo del tubo puede obtenerse ahora por adición algebraica de las expresiones de las dos fuerzas.

Regrese a la Sección 8 y elija otra respuesta.

(23)

Su respuesta en la Sección 11 es incorrecta. El propósito es simplemente combinar las expresiones obtenidas para la fuerza neta de presión (ver Sección 26) y para el componente de la fuerza gravitacional paralela al tubo (ver Sección 11). Las fuerzas son siempre combinadas por medio de

(24)

Su respuesta en la Sección 1 es incorrecta. Si consideramos flujo libre en el tubo, la fuerza sobre el elemento fluido será dada por el término,

(25)

Su respuesta en la Sección 31,

$$- \frac{dp}{dl} \Delta l \cdot n \cdot A,$$

es correcta. La gradiente o derivada de la presión, dp/dl , multiplicada por el intervalo de longitud Δl da el cambio en presión, $p_2 - p_1$, que ocurre en ese intervalo. Como necesitamos el término, $p_1 - p_2$, utilizamos un signo negativo. Este término multiplicado por el área del fluido, nA , da la fuerza neta de presión sobre el elemento.

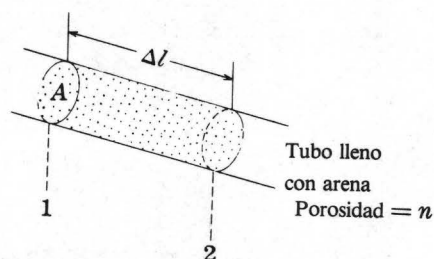
En este capítulo, nuestro propósito es desarrollar la Ley de Darcy igualando las fuerzas impulsoras de flujo con las fuerzas friccionales que retardan el mismo. Hemos considerado la fuerza de presión que es una de las fuerzas causantes de flujo. Además de esta fuerza de presión, el elemento fluido es también influido por la fuerza de gravedad. El producto de la aceleración debida a la gravedad y

suma de vectores. Sin embargo, en este caso, los vectores en consideración están orientados en la misma dirección. Es decir, tanto la fuerza neta de presión como el componente de la fuerza gravitacional están orientados en la dirección del flujo. Por lo tanto en este caso, la suma vectorial es igual a una simple suma escalar de las magnitudes de los dos componentes.

Regrese a la Sección 11 y elija otra respuesta.

$p_1 A$. Aquí sin embargo, parte del área A es ocupada por granos sólidos de arena y el resto por la cara superior del elemento fluido. Para nuestros resultados, asumimos que la relación del área de fluido con el área total es igual a la porosidad n .

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.



la masa, m , del fluido en el elemento nos da la fuerza gravitacional total sobre el mismo.

PREGUNTA

Para la masa del fluido en nuestro elemento (mostrado en el diagrama), ¿cuál de las siguientes ecuaciones es correcta?

Pase a la Sección:

(26)

| | |
|---|----|
| $m = \Delta l \cdot n \cdot A$ | 3 |
| $m = \rho \cdot \Delta l \cdot A$ | 17 |
| $m = \rho \cdot \Delta l \cdot n \cdot A$ | 15 |

Su respuesta

$$\left(\frac{dp}{dl} + \rho g \frac{dz}{dl} \right) \Delta l \cdot n \cdot A = \frac{\mu}{k} \frac{Q}{A},$$

en la Sección 20 es incorrecta. Cada uno de los términos de fuerza—la fuerza neta de impulsión y la fuerza retardante—contiene la expresión $\Delta l \cdot n \cdot A$

que representa el volumen de fluido en el elemento. Cuando se combinan estos términos de fuerza y la suma se iguala a cero, el término $\Delta l \cdot n \cdot A$ puede ser excluido de la ecuación.

Regrese a la Sección 20 y elija otra respuesta.

(27)

Su respuesta en la Sección 20,

$$- \frac{k}{\mu} \left(\frac{dp}{dl} + \rho g \frac{dz}{dl} \right) = \frac{Q}{A},$$

es correcta. Para el caso de un fluido de densidad y viscosidad uniformes, los términos μ y ρ son constantes y pueden ser combinados con las otras constantes en el problema para formar una nueva constante, K , definida como

$$K = \frac{k \rho g}{\mu}.$$

Utilizando esta nueva constante podemos escribir nuestra ecuación de la siguiente forma

$$-K \left(\frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dl} + \frac{dz}{dl} \right) = \frac{Q}{A}.$$

PREGUNTA

Teniendo en cuenta que el término $1/\rho g$ es una constante, de manera que

$$\frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dl} = \frac{d \left(\frac{p}{\rho g} \right)}{dl},$$

¿cuál de las siguientes ecuaciones constituye una expresión válida para la ecuación que se mostró anteriormente?

Pase a la Sección:

$$\frac{Q}{A} = -K \frac{dh}{dl} \quad 7$$

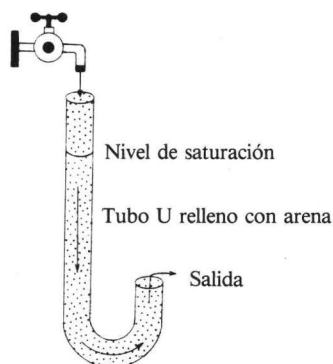
$$\frac{Q}{A} = -K \left(\frac{dp}{dl} + \frac{dz}{dl} \right) \quad 9$$

$$\frac{Q}{A} = -K \left(\frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dl} + \frac{dh}{dl} \right) \quad 30$$

h representa la carga definida en la Parte I—la cual es

$$h = \frac{p}{\rho g} + z.$$

(28)



Su respuesta en la Sección 7 es incorrecta. El agua subterránea frecuentemente se descarga hacia arriba, en valles de ríos y arroyos. En la figura, el flujo ascendente ocurre en el tramo corto del tubo en forma de -U. Por lo tanto, el planteo (a) de la Sección 7 no es siempre cierto.

Regrese a la Sección 7 y elija otra respuesta.

(29)

Su respuesta en la Sección 28 es incorrecta. Explicamos en la Parte I que la carga hidráulica, h , se obtuvo por

$$h = \frac{p}{\rho g} + z.$$

(30)

La derivada de h con respecto a la distancia, l , se obtiene por lo tanto como

$$\frac{dh}{dl} = \frac{d \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)}{dl}.$$

Utilizando esta relación, regrese a la Sección 28 y elija otra respuesta.

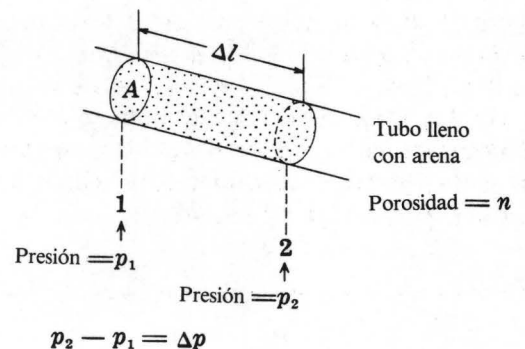
Su respuesta en la Sección 8 es correcta. La fuerza neta en la dirección del flujo se obtiene por la diferencia entre las dos fuerzas opuestas ejercidas sobre las caras del elemento, por los elementos adyacentes al fluido. Podríamos ahora factorizar el término común nA y obtener como nuestra expresión para la fuerza neta de la presión $(p_1 - p_2)nA$, ó $-\Delta p nA$, donde Δp indica la pequeña diferencia en presión, $p_2 - p_1$, entre las dos caras del elemento.

Debido a que la presión varía de un punto a otro dentro de nuestro sistema, podremos hablar de una gradiente de presión que es la proporción de cambio de la presión con la distancia, l , a lo largo de la línea de flujo. Esta gradiente puede ser expresada en libras por pulgadas al cuadrado (de presión) por pie (de distancia). Se representa por el símbolo dp/dl y es referida como la derivada de la presión con respecto a la distancia en la dirección l . Si construimos un gráfico de presión versus distancia, dp/dl representaría la pendiente del gráfico.

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones es aproximadamente equivalente a la fuerza neta de presión,

(31)



$-\Delta p nA$, sobre nuestro elemento fluido? (mostrado nuevamente en el diagrama)

Pase a la Sección:

$$\frac{dp}{dl} \Delta l \cdot n \cdot A \quad 26$$

$$\frac{dp}{dl} nA \quad 5$$

$$\Delta p \frac{dp}{dl} nA \quad 14$$

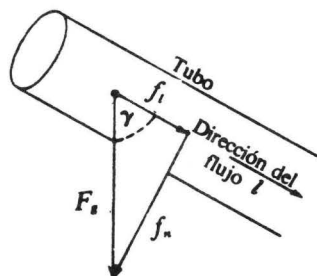
Su respuesta, $\rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g \cdot \sin \gamma$, en la Sección 35 es incorrecta. Ya hemos visto que la magnitud de nuestro componente de fuerza se obtiene por $\rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g \cdot \cos \gamma$. En la respuesta que ha escogido, $\sin \gamma$ ha sido sustituido por $\cos \gamma$

(32)

en nuestra expresión original y esto podría ser cierto sólo para un valor particular del ángulo γ . Sin embargo, el propósito de esta pregunta es encontrar un término equivalente para $\cos \gamma$ y sustituirlo por el componente de fuerza en nuestra expresión anterior.

Regrese a la Sección 35 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 15 es correcta; podríamos descomponer la fuerza gravitacional, F_g en dos fuerzas ortogonales, f_i y f_n , paralela y perpendicular al eje del tubo respectivamente. Como se muestra en la figura, no hay movimiento perpendicular al tubo; el componente de la fuerza gravitacional en esta dirección es anulado por las fuerzas estáticas ejercidas contra el fluido por las paredes del tubo. El componente paralelo al tubo contribuye al movimiento y debe ser tomado en cuenta en las ecuaciones que describen el flujo.



PREGUNTA

La magnitud de la fuerza gravitacional total hacia el elemento se obtiene de la masa del elemento multiplicada por la aceleración causada por la gravedad; es decir $F_g = mg$, donde m , es la masa del elemento fluido. En referencia al diagrama mostrado, ¿cuál de las siguientes expresiones da la magnitud del componente de la fuerza gravitacional paralelo al eje del tubo?

Pase a la Sección:

| | |
|---|----|
| $f_i = \rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g$ | 6 |
| $f_i = \rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g \cdot \cos \gamma$ | 35 |
| $f_i = n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g \cdot \tan \lambda$ | 37 |

(33)

Su respuesta en la Sección 19,

$$- \frac{1}{k} \frac{Q^2 \mu}{\Delta l \cdot n \cdot A},$$

es incorrecta. Asumimos que la fuerza retardante sería proporcional en alguna forma a la viscosidad dinámica (μ), al volumen del fluido en el elemento ($\Delta l \cdot n \cdot A$), y al caudal específico o flujo por unidad de área (Q/A). Su respuesta presenta la

fuerza retardante como proporcional al cuadrado de la descarga del fluido, lo cual puede ser compatible con dichas hipótesis, pero inversamente proporcional al volumen del fluido en el elemento, que es incompatible con nuestras suposiciones.

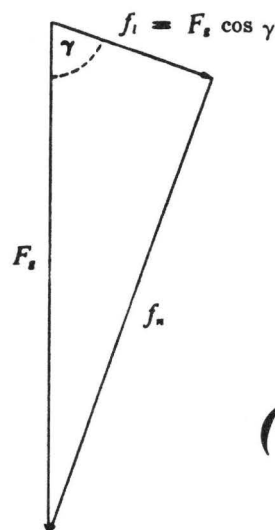
Regrese a la Sección 19 y elija otra respuesta.

(34)

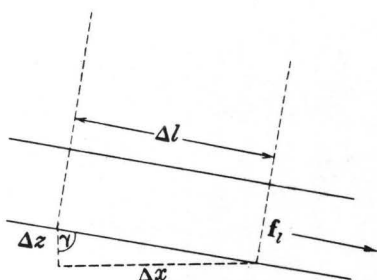
Su respuesta, $\rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g \cdot \cos \gamma$, en la Sección 33 es correcta. La masa del elemento fluido, como hemos visto es $\rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A$; al multiplicar por la aceleración, g , se obtiene la fuerza gravitacional total sobre el elemento. El componente de esta fuerza paralelo al tubo como se indica en el diagrama vectorial se obtendrá multiplicando la fuerza total por el coseno de γ .

PREGUNTA

Supongamos que dibujamos un pequeño triángulo rectángulo, tomando la hipotenusa Δl , como la longitud de nuestro elemento fluido, y construi-



(35)



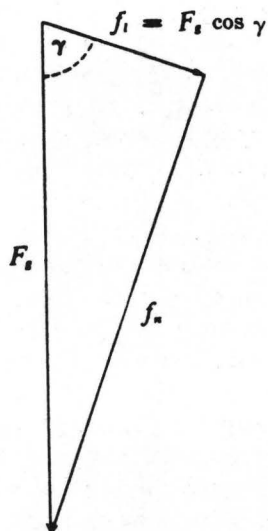
(35)—Con.

Su respuesta en la Sección 20 es incorrecta. Si la suma de las expresiones de las dos fuerzas se iguala a cero, tenemos

$$-\left(\frac{dp}{dl} + \rho g \frac{dz}{dl}\right)(\Delta l \cdot n \cdot A) - \frac{1}{k} \mu(\Delta l \cdot n \cdot A) \frac{Q}{A} = 0.$$

(36)

Su respuesta en la Sección 33 es incorrecta. La fuerza gravitacional total sobre el elemento se da por mg , donde m es la masa del fluido en el elemento y g es la aceleración causada por la gravedad. La masa del fluido en el elemento, es a su vez dada por el volumen del fluido en el elemento



(37)

mos los dos lados Δz y Δx , como en el diagrama. ¿Cuál de las siguientes expresiones podría ser utilizada para la magnitud (sin relación al signo) del componente de la fuerza gravitacional paralelo al flujo?

Pase a la Sección:

$$\rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g \cdot \sin \gamma \quad 32$$

$$\rho \cdot n \cdot A \cdot g \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} \quad 4$$

$$\rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g \cdot \frac{\Delta z}{\Delta l} \quad 11$$

Podríamos dividir por el término $\Delta l \cdot n \cdot A$, que representa el volumen del fluido en el elemento y reordenar la ecuación resultante para obtener el resultado requerido.

Regrese a la Sección 20 y elija otra respuesta.

multiplicado por la masa por unidad de volumen, o densidad de masa del fluido designada como ρ . El volumen del fluido en el elemento, tal como hemos visto es $n \cdot \Delta l \cdot A$, donde n es la porosidad. La masa por lo tanto es $\rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A$, y la fuerza total de gravedad sobre el fluido es dada por

$$F_g = \rho \cdot n \cdot \Delta l \cdot A \cdot g.$$

Se requiere que el componente de esta fuerza gravitacional sea paralelo al eje del tubo. El esquema muestra un diagrama vectorial en el cual la longitud de cada flecha es proporcional a la fuerza o al componente que representa. La fuerza gravitacional está representada por la flecha F_g y los componentes están representados por las flechas f_l y f_n . Consideraciones geométricas permiten formarse una idea general para la resolución de un vector en dos componentes. La magnitud del componente de un vector en una dirección dada es el producto de la magnitud del vector y el coseno del ángulo entre la dirección del vector y la dirección dada.

Regrese a la Sección 33 y elija otra respuesta.

Generalizaciones de la Ley de Darcy

La fórmula de la Ley de Darcy considerada en el programa anterior es útil únicamente para el flujo unidimensional. Las consideraciones en esta sección muestran, con un enfoque general, la manera como la Ley de Darcy se aplica a situaciones más complejas. La notación vectorial se utiliza para reducir la presentación y está dirigida principalmente a los lectores familiarizados con esta notación. Aquellos conceptos esenciales para el material incluido posteriormente en este programa serán estudiados nuevamente según sean requeridos durante el proceso—sin el uso de notación vectorial. El material que se presenta aquí no es difícil y para los lectores no familiarizados con la notación vectorial les será posible analizar los procesos matemáticos consultando textos sobre análisis vectorial. Sin embargo, quienes prefieran pueden simplemente leer esta sección para familiarizarse con los aspectos cualitativos del material y pasar directamente a la Parte III.

Para el flujo tridimensional consideramos el caudal q , ó Q/A , como una cantidad vectorial; con los componentes iq_x , jq_y y kq_z en las tres direcciones de las coordenadas. Los vectores i , j y k representan las unidades vectoriales clásicas en el sistema cartesiano. Consideramos un área pequeña, A_x , orientada en ángulo recto con el eje de las x en un punto 0 y observamos que la descarga del fluido a través del área es Q_x ; el valor limitante de la relación Q_x/A_x , a medida que A_x se reduce hacia el punto 0, da el valor de q_x para el punto 0. q_y y q_z se definen en igual forma para las direcciones y y z respectivamente. El caudal específico en el punto 0 se da por la suma vectorial

$$q = \frac{Q}{A} = iq_x + jq_y + kq_z,$$

siendo q la función de un vector en un punto dado; su magnitud y dirección varían con su ubicación en el flujo continuo y con su ubicación y tiempo en el flujo no continuo.

Si el medio poroso es homogéneo e isotrópico y si el fluido es de densidad y viscosidad uniforme, los componentes del vector caudal específico se obtienen separadamente por una expresión de la Ley de Darcy, utilizando la derivada parcial de carga con respecto a la distancia en la dirección en cuestión. Es decir, los componentes se dan por,

$$q_x = -K \frac{\partial h}{\partial x}, q_y = -K \frac{\partial h}{\partial y}, q_z = -K \frac{\partial h}{\partial z},$$

donde K es la conductividad hidráulica.

Por lo tanto, el vector caudal específico se obtiene en este caso por

$$q = -K \left(i \frac{\partial h}{\partial x} + j \frac{\partial h}{\partial y} + k \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

ó

$$q = -K \nabla h,$$

donde ∇h indica el vector gradiente de carga.

De esta manera, si el medio es isotrópico y homogéneo, $-Kh$ constituye un potencial de velocidad y los diversos métodos sobre la teoría potencial, como se aplican al estudiar el flujo del calor y electricidad, pueden ser utilizados en el estudio del movimiento de aguas subterráneas. Debido a que el vector caudal específico es colinear con Δh y es orientado en ángulo recto a las superficies de igual carga, el análisis de la red de flujo aparenta ser un método útil para resolver problemas de campo.

En la práctica, generalmente no se encuentran acuíferos homogéneos e isotrópicos. Sin embargo, por falta de información específica, los acuíferos frecuentemente se consideran homogéneos e isotrópicos para obtener soluciones iniciales o de aproximación en los problemas de aguas subterráneas.

Una expresión más general de la Ley de Darcy podría representar mejor las condiciones de muchos acuíferos, asignando una conductividad hidráulica distinta a cada una de las direcciones de

las coordenadas. Por lo tanto, la Ley de Darcy adquiere la forma

$$q_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x}, q_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial y}, q_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z},$$

donde K_x , K_y y K_z representan las conductividades hidráulicas en las direcciones x , y y z respectivamente, y $q = i q_x + j q_y + k q_z$.

Esta forma de la Ley de Darcy sólo puede ser aplicada en acuíferos anisótropos caracterizados por 3 ejes principales de conductividad hidráulica (o permeabilidad) las cuales son recíprocamente ortogonales, donde la dirección de conductividad hidráulica máxima forma un ángulo recto con la dirección de conductividad hidráulica mínima. Estos ejes deben corresponder con los ejes x , y y z utilizados en el análisis. Como condición, uno de los principales ejes de conductividad debe ser vertical. A menos que el eje z sea tomado en la dirección vertical, el término $\partial h / \partial z$ no puede ser utilizado para representar la suma de la gradiente de presión vertical y el término de la fuerza gravitacional.

En este caso de anisotropía se ha demostrado fácilmente que el vector caudal específico y las líneas de flujo no son ortogonales a las superficies de igual carga, ni se satisface la condición para la existencia de un potencial de velocidad. Soluciones matemáticas formales a los problemas de campo son tan fáciles de obtener como en el caso isótropo, debido a que una transformación relativamente simple de escalas puede introducirse para convertir el sistema anisótropo a un sistema isótropo equivalente (Muskat, 1937). De este modo el problema puede ser resuelto en el sistema isotrópico y la solución transformada a su equivalente en el sistema anisotrópico original.

Probablemente la forma más común de anisotropía que se encuentra en el campo es la que se presenta en material sedimentario estratificado en el cual la permeabilidad, o conductividad hidráulica, perpendicular a la estratificación es menor que aquella paralela a la misma. Si la estratificación es horizontal, se aplicaría la forma de la Ley de Darcy mencionada anteriormente utilizando $K_x = K_y$. La anisotropía en este caso es bidimensional, con el eje de permeabilidad mínima perpendicular a la estratificación y el eje de máxima permeabilidad paralela a la misma. En muchos casos se supone que los acuíferos presentan esta clase de anisotropía simple bidimensional cuando en realidad se caracterizan

por estratificación heterogénea y alteraciones discretas de permeabilidad. Este tipo de suposiciones que simplifican la situación, frecuentemente permiten la obtención de soluciones aproximadas en casos en los cuales otras formas de soluciones no fueran posibles.

Sin embargo, esta forma generalizada de la Ley de Darcy resulta inadecuada para muchos problemas. Como por ejemplo, se puede considerar un acuífero estratificado con un ángulo de buzamiento notable que presenta anisotropía bidimensional simple. La dirección de la permeabilidad mínima, perpendicular a la estratificación, en este caso no coincide con la vertical. Se podrían elegir nuevas coordenadas para conformar nuevas direcciones principales de conductividad. Si se procede de este modo, el componente del caudal específico en cada una de las nuevas coordenadas se expresará en términos de gradiente de presión en la dirección apropiada, y el componente de la fuerza gravitacional en esa dirección. No sería posible reducir la ecuación a una forma simple como se dio anteriormente, utilizando las derivadas direccionales principales de h . Por otra parte, también se podría mantener el sistema de coordenadas horizontal-vertical, en cuyo caso el eje principal de conductividad no coincide con los ejes de las coordenadas. En este caso, la conductividad hidráulica debe ser expresada como un tensor; el componente de la descarga específica en una dirección no dependerá únicamente de la gradiente de carga en esa dirección, sino también de la gradiente de carga en otras direcciones de las coordenadas.

Además de estas consideraciones sobre acuíferos anisótropos, los problemas prácticos requieren mucha atención respecto a la heterogeneidad, tanto del fluido como del acuífero. Si el acuífero es heterogéneo, la conductividad hidráulica debe ser considerada como una función de las coordenadas espaciales; en este caso, la conductividad hidráulica (o en algunos casos la permeabilidad intrínseca) se define como un tensor que varía de acuerdo a su posición en el acuífero.

Si el fluido es heterogéneo, su viscosidad y densidad no pueden ser consideradas como constantes, tal como se expuso en la Parte II. Las ecuaciones no pueden ser reducidas a términos de conductividad hidráulica y gradiente de carga; se tiene que usarlas en términos de permeabilidad específica, viscosidad, gradientes de presión y componentes de la fuerza gravitacional (las cuales dependen de la densidad del fluido y variarán con posición y

posiblemente con tiempo a medida que la densidad del fluido varía). Un caso especial de cierta importancia es aquel en el cual el acuífero es horizontal; con sus ejes principales de permeabilidad en las direcciones x , y y z , con variaciones en la densidad y viscosidad del flujo. Para este caso la Ley de Darcy podría escribirse

$$q_x = - \frac{k_x}{\mu_{x,y,z}} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad q_y = \frac{-k_y}{\mu_{x,y,z}} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$q_z = \frac{-k_z}{\mu_{x,y,z}} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_{x,y,z} g \right),$$

y nuevamente

$$q = i q_x + j q_y + k q_z.$$

En estas ecuaciones, k_x , k_y y k_z corresponden a las permeabilidades intrínsecas en las direcciones x , y y z ; $\mu_{x,y,z}$ está en función de la viscosidad dinámica; $\rho_{x,y,z}$ está en función de la densidad; el resto de los términos fueron definidos previamente. Como se asume que la gravedad no tiene componentes en el plano horizontal, la densidad no se toma en cuenta en las expresiones para q_x y q_y . En acuíferos naturales, las variaciones de la densidad se relacionan particularmente a las variaciones en el contenido de sólidos disueltos en el agua, mientras que las variaciones en la viscosidad se relacionan principalmente con las variaciones de temperatura de aguas subterráneas. Por lo tanto, las ecuaciones expresadas anteriormente son útiles en situaciones donde se conocen las variaciones en temperatura y calidad del agua en los acuíferos.

Parte III. Aplicación de la Ley de Darcy a los Problemas de Campo

La Ley de Darcy, como se expresa en las consideraciones finales de la Parte II, puede ser generalizada para el caso de flujo en tres dimensiones; y ser combinada con otras leyes y conceptos para desarrollar ecuaciones en problemas relativamente complejos en la hidráulica de aguas subterráneas. Aún en la forma simple desarrollada

en el programa de la Parte II, la Ley de Darcy tiene aplicación directa en muchos problemas de campo. En la Parte III consideramos algunos ejemplos de tales aplicaciones directas. Posteriormente, en las Partes V y VI, consideraremos las combinaciones de la Ley de Darcy y otros conceptos para obtener ecuaciones para problemas más complejos.

En la Parte II indicamos que la Ley de Darcy es una ecuación diferencial, es decir, una ecuación que contiene una derivada. Ésta nos proporciona información sobre la rapidez de variación de carga con la distancia bajo condiciones de flujo conocidas. Cuando se trata de problemas de agua subterránea, en general, necesitaremos expresiones que relacionen valores de carga, en vez de proporciones de cambio de carga, a las condiciones de flujo. El pasar de una ecuación diferencial que describe el régimen de variación de carga, a una ecuación algebraica que expresa valores de carga es lo mismo que obtener una solución a la ecuación diferencial. Existen varias técnicas para efectuar esta operación que no necesitan ser detalladas aquí. Para nuestro caso, será suficiente reconocer una solución cuando se nos proporciona alguna, es decir, poder resolver una ecuación algebraica para determinar si es una solución a una ecuación diferencial. Aquí se debe únicamente diferenciar la ecuación algebraica. O sea que si deseamos saber si la

ecuación algebraica es una solución de la ecuación diferencial, simplemente diferenciamos la ecuación algebraica. Si el resultado es equivalente a la ecuación diferencial, la ecuación algebraica constituye una solución a la ecuación diferencial. Cuando el resultado no es equivalente, la ecuación algebraica no es la solución. Por lo tanto, para nuestros propósitos, consideramos como solución a la ecuación diferencial una ecuación algebraica que al ser diferenciada resulte en la ecuación diferencial dada.

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes ecuaciones algebraicas es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = K ?$$

Pase a la Sección:

| | |
|--------------|----|
| $y = Kx^2$ | 15 |
| $x = 2y + K$ | 23 |
| $y = Kx + 5$ | 7 |

1 □

Su respuesta en la Sección 35,

$$\frac{dh}{d(\ln r)} = \frac{Q}{2\pi Kb},$$

es correcta. Esta ecuación es equivalente a la ecuación diferencial original para el problema y expresa que la rapidez de cambio de la carga hidráulica, con respecto al cambio en el logaritmo neperiano de la distancia radial, es constante e igual a

$$\frac{Q}{2\pi Kb}.$$

PREGUNTA

En nuestro problema de bombeo de pozo, si dibujáramos un gráfico de carga hidráulica versus

el logaritmo neperiano de la distancia radial del pozo, ¿cuál de los siguientes conceptos se aplicaría a este gráfico?

Pase a la Sección:

- | | |
|--|----|
| (a) El dibujo se tornaría progresivamente más inclinado a medida que los valores de $\ln r$ disminuyen, es decir, a medida en que se acerca al pozo. | 18 |
| (b) Serán observados cambios iguales en la carga sobre intervalos que representan igual cambio en r . | 31 |
| (c) El gráfico será una línea recta. | 38 |

2 □

Su respuesta en la Sección 19 es correcta. Si la altura de caída en el pozo (y en todo el acuífero) antes del bombeo es igual a h_e , el término $h_e - h_w$ es el descenso del nivel del pozo bombeado (asumiendo que no hay pérdidas adicionales de carga asociadas con el flujo a través del filtro del pozo o dentro del mismo). Entonces, la ecuación seleccionada permite predecir el abatimiento asociado con cualquier bombeo, Q . Alternativamente, la ecuación puede ser visualizada como un método para calcular la conductividad hidráulica, K , del acuífero en base a las medidas de campo de Q y $h_e - h_w$, en base a medidas de carga para cualesquier radio arbitrario, r_1 y r_2 utilizando pozos de observación. La teoría de flujo en equilibrio hacia un pozo desarrollada aquí es a menudo referida como la teoría de Thiem debido a que G. Thiem fue quien la formuló (Thiem, 1906).

Aunque no es común, en la práctica, encontrar un pozo localizado convenientemente en el centro de una isla circular, el ejemplo es muy útil. La operación hidráulica de cualquier pozo es similar, en muchos aspectos importantes, al caso del pozo en una isla. En particular, la disminución en el área seccional de flujo al acercarse al pozo produce el "cono de depresión" logarítmico en la superficie potenciométrica, que es una característica en cada problema de bombeo de pozos. En efecto, es el factor dominante en estos problemas, debido a que cerca del pozo, dentro de este cono

de depresión, por lo general ocurren las pérdidas de carga más grandes relacionadas con la operación del pozo. La simetría radial asumida en el análisis de Thiem generalmente prevalece en la mayoría de los problemas de bombeo de pozos, por lo menos en el área cerca del mismo pozo.

Los lectores familiarizados con ecuaciones diferenciales notarán que las ecuaciones de flujo radial desarrolladas aquí pueden obtenerse más directamente separando las variables en la ecuación

$$\frac{Q}{2\pi br} = K \frac{dh}{dr},$$

e integrando entre los límites r_1 y r_2 , ó r_w y r_e . Es decir, estas ecuaciones de flujo radial, las cuales expresan que la carga variará con el logaritmo de la distancia radial, son realmente soluciones a esta ecuación diferencial y si son diferenciadas respecto a r , se obtiene la ecuación diferencial. Nuevamente los lectores familiarizados con la teoría potencial reconocerán la distribución de la pérdida de carga alrededor del pozo como un ejemplo del "potencial logarítmico" relacionado con los problemas de flujo potencial que comprenden simetría cilíndrica en otras ramas de la física.

Usted has completado la Parte III. Puede continuar con la Parte IV.

3 □

Su respuesta en la Sección 9,

$$h = h_0 - \frac{2Q}{Kw} x,$$

es incorrecta. Si diferenciamos esta ecuación considerando h_0 constante, obtenemos

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{2Q}{Kw},$$

4 □

que no es la ecuación diferencial que desarrollamos. Tenga en cuenta que para encontrar la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{d(h^2)}{dx} = -\frac{2Q}{Kw},$$

debemos obtener una expresión que nos dé esta ecuación después de diferenciada.

Regrese a la Sección 9 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 8 es incorrecta. La ecuación diferencial nos indica que cualquier solución obtenida para h en función de x , debe ser tal que la derivada de h con respecto a x , dh/dx sea una constante $-(Q/KA)$. De esta manera sabemos que (1) debido a que la derivada es una constante (no comprende x) el gráfico de h vs x para cual-

5 □

quier solución deberá tener una pendiente constante. Es decir, el gráfico deberá dar una línea recta; y (2) debido a que la constante tiene el mismo valor para cualquier solución, los gráficos para soluciones diferentes o distintas tendrán todos las mismas pendientes, o sea líneas rectas paralelas. Una familia de curvas que intercepta el eje de las x en un punto común, tal como en la respuesta que usted escogió, no tendría tales características.

Regrese a la Sección 8 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 41 es incorrecta. La dirección de flujo en este problema es radial hacia el pozo, que es considerada como un eje. El área de sección transversal de flujo deberá tomarse a

6 □

un ángulo recto a la dirección del flujo radial; es decir, deberá ser una superficie cilíndrica dentro del acuífero tomando la línea central del pozo como su eje. A una distancia radial r del pozo, la sección de flujo será el área de una superficie cilíndrica de radio r y de altura igual al espesor del acuífero.

Regrese a la Sección 41 y elija otra respuesta.

Su respuesta, $y = Kx + 5$, en la Sección 1 es correcta, de las tres expresiones en consideración, es la única que por diferenciación da

$$\frac{dy}{dx} = K.$$

Sin embargo, es obvio que $y = Kx + 5$ no es la única solución que proporciona este resultado

7 □

después de diferenciar. Por ejemplo, la diferenciación de las ecuaciones $y = Kx + 7$, $y = Kx + 3$, ó $y = Kx$ darán también $dy/dx = K$. El término constante sumado o restado de la expresión de la derecha no afecta a la diferenciación—no importa que valor tenga esta constante. La derivada de y con respecto a x es siempre K . Debido a que tenemos una infinidad de constantes para sumar o restar de la expresión, existirá un número infinito de ecuaciones algebraicas que pueden ser consideradas soluciones a nuestra ecuación diferencial. Esta es una característica general de las ecuaciones

diferenciales—tienen un número infinito de soluciones.

PREGUNTA

Dadas las siguientes ecuaciones algebraicas relacionando la carga h , a la distancia x

$$(a) \ h = -\frac{Q}{KA} x,$$

$$(b) \ h = h_0 - \frac{Q}{KA} x,$$

$$(c) \ h = h_0 - \frac{Q}{KA} x^2 + 7,$$

donde h_0 , Q , K y A son constantes; ¿cuál de estas ecuaciones son soluciones a la ecuación diferencial

$$\frac{Q}{A} = -K \frac{dh}{dx}?$$

Pase a la Sección:

| | |
|-----------------------|----|
| las tres | 29 |
| sólo (a) | 14 |
| (a) y (b) pero no (c) | 8 |

Con.—7 □

Su respuesta en la Sección 7 es correcta. Sea (a) ó (b), cuando son diferenciadas y reorganizadas producen la ecuación

$$\frac{Q}{A} = -K \frac{dh}{dx}.$$

La diferenciación de (c) conduce a una ecuación totalmente diferente.

En el ejemplo anterior, las ecuaciones algebraicas contienen valores de carga hidráulica h a dife-

rentes distancias, de cierto punto de referencia; mientras que la ecuación diferencial se relaciona con la rapidez de cambio de carga con la distancia. La ecuación diferencial es obviamente la Ley de Darcy y expresa que si se dibuja un gráfico de la carga versus distancia, la pendiente de la línea será constante—es decir, el gráfico será una línea recta. Los gráficos de las ecuaciones (a) y (b) de la Sección 7 se muestran en el diagrama. Cada uno es una línea recta con la pendiente igual a

$$-\frac{Q}{KA};$$

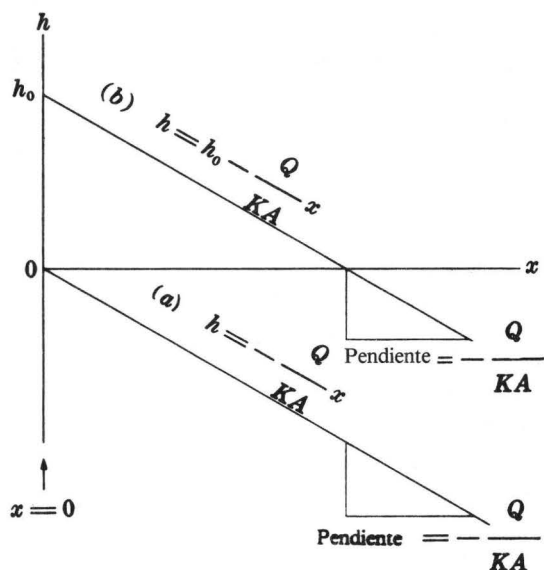
la intersección de la ecuación (a) con el eje h es $h = 0$, mientras que para (b) es $h = h_0$. Estos puntos de intersección dan los valores de h para $x = 0$, proporcionan los puntos de referencia a partir de los cuales se mide h .

PREGUNTA

Si tuviéramos que representar gráficamente todas las soluciones posibles a la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{Q}{KA},$$

8 □



el resultado sería:

Pase a la Sección:

Una familia de curvas, infinita en número, cada una inteterceptando el eje x en

$$x = -\frac{Q}{KA}$$

5

8 □ — Con.

Un número infinito de líneas paralelas, con pendiente

$$-\frac{Q}{KA},$$

y distinguidas por sus diferentes intersecciones con el eje $x = 0$.

10

Un limitado número de líneas rectas paralelas con pendiente

$$-\frac{Q}{KA},$$

que interceptan el eje $x = 0$ para diferentes valores positivos de h .

20

Su respuesta en la Sección 25,

$$Q = -Kwh \frac{dh}{dx},$$

es correcta. De acuerdo a las reglas de diferenciación, la derivada de h^2 con respecto a x se obtiene por

$$\frac{d(h^2)}{dx} = 2h \frac{dh}{dx}.$$

Por lo tanto, sustituyendo

$$\frac{1}{2} \frac{d(h^2)}{dx}$$

por $h(dh/dx)$ en la ecuación

$$Q = -Kwh \frac{dh}{dx}$$

y reordenando, obtenemos

$$\frac{d(h^2)}{dx} = \frac{-2Q}{Kw}.$$

Esta ecuación diferencial expresa que la derivada de h^2 con respecto a x es igual al término constante

$$\frac{-2Q}{Kw}.$$

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones, después de diferenciada, da la forma mencionada anteriormente—es decir, cuál de las siguientes expresiones constituye una solución a la ecuación diferencial? (h_0 es una constante, que representa el valor de h a $x = 0$).

$$h^2 = h_0^2 - \frac{2Q}{KW} x^2 \quad 16$$

$$h^2 = h_0^2 - \frac{2Q}{Kw} x \quad 41$$

$$h = h_0 - \frac{2Q}{Kw} x \quad 4$$

9 □

Su respuesta en la Sección 8 es correcta. Cualquier línea recta con pendiente

$$-\frac{Q}{KA}$$

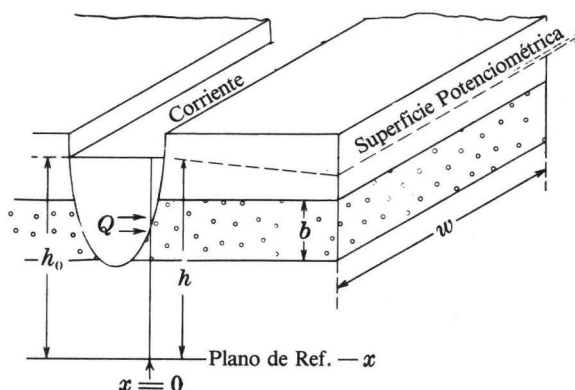
será la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{Q}{KA}.$$

Existe un número infinito de líneas con esta pendiente, correspondiente a un número infinito de soluciones a la ecuación diferencial.

La figura muestra un acuífero confinado de espesor b . El acuífero es cortado íntegramente por una corriente, y se produce infiltración del río al acuífero. El nivel de la corriente permanece a una elevación h_0 sobre la altura de referencia (datum), cuyo nivel es arbitrariamente escogido. La dirección de la corriente a un ángulo recto coincide con el eje x , tomando $x = 0$ como el borde de la corriente. Asumimos que el sistema está en equilibrio, sin cambios con el factor tiempo. A lo largo de un tramo del río de una longitud w , la cantidad total de pérdidas por infiltración (por ejemplo, en pies cúbicos por segundo) es expresada como $2Q$. Asumimos que la mitad de esta pérdida ocurre a través del banco a la derecha de la corriente y por lo tanto penetra en el acuífero por la parte mostrada en la figura. Esta infiltración luego se aleja de la corriente en un flujo constante a lo largo de la dirección x . La distribución resultante de la carga hidráulica dentro del acuífero se indica con una línea punteada denominada en el gráfico "superficie potenciométrica." Esta superficie, a veces llamada "superficie piezométrica," en realidad define el nivel estático del agua en pozos o tubos colocados en varios puntos del acuífero. La ecuación diferencial aplicable a este problema se obtiene aplicando la Ley de Darcy al flujo Q , a través de la sección bw , y puede ser expresada como

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{-Q}{Kbw},$$



donde K es la conductividad hidráulica del acuífero. La distribución de carga, es decir, la superficie potenciométrica es descrita por una de las soluciones a esta ecuación diferencial. Además de satisfacer la ecuación diferencial, la solución requerida deberá dar el valor correcto de h al borde de la corriente, o sea para $x = 0$.

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones da la solución particular (a la ecuación diferencial anterior) que se aplica al problema descrito en esta sección?

Pase a la Sección:

$$h = -\frac{Q}{Kbw} x \quad 22$$

$$h = 2Q - \frac{Q}{Kbw} x \quad 36$$

$$h = h_0 - \frac{Q}{Kwb} x \quad 24$$

Su respuesta en la Sección 27 es incorrecta. La disminución en el radio no compensa la disminución del área de sección transversal; es más bien la

11 □

causa de la reducción del área. La reducción del área a lo largo de la trayectoria de flujo, es una característica fundamental del problema que aquí se considera. Tiene un efecto dominante en la solución del problema.

Regrese a la Sección 27 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 41 es incorrecta. El flujo del agua es dirigido radialmente hacia el pozo. Cualquier área seccional de flujo perpendicu-

12 □

lar a la dirección de movimiento radial será una superficie cilíndrica con la línea central del pozo como su eje. El área de flujo a una distancia radial r , del pozo corresponderá entonces al área de una superficie cilíndrica de radio r con una elevación igual al espesor del acuífero.

Regrese a la Sección 41 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 35,

$$(\ln r) \frac{dh}{dr} = \frac{Q}{2\pi Kb},$$

es incorrecta. La ecuación diferencial como se expresa en la Sección 35 era

13 □

$$r \frac{dh}{dr} = \frac{Q}{2\pi Kb}.$$

En su respuesta, $\ln r$ ha sido reemplazado por r . Obviamente esto no es la que necesitamos; $\ln r$ no es igual a r . Las relaciones presentadas en la Sección 35 pueden ser utilizadas para obtener una expresión que es equivalente a dh/dr . Esta expresión puede ser sustituida por dh/dr en la ecuación mencionada arriba para obtener el resultado requerido.

Regrese a la Sección 35 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 7 es incorrecta. Es cierto que la expresión (a),

$$h = -\frac{Q}{KA} x,$$

14 □

da el resultado

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{Q}{KA},$$

una vez diferenciada y es por eso una solución a la ecuación de interés. Sin embargo, esta no es la única solución que da el resultado requerido después de su diferenciación.

Regrese a la Sección 7 y pruebe las expresiones restantes para encontrar la respuesta correcta.

Su respuesta, $y = Kx^2$, en la Sección 1 es incorrecta. Si diferenciamos la ecuación $y = Kx^2$, obtendremos

$$\frac{dy}{dx} = 2Kx,$$

que no es la ecuación diferencial con la cual empezamos. Nuestra ecuación diferencial era

$$\frac{dy}{dx} = K,$$

y busquemos una solución a esta ecuación—o sea, busquemos una expresión algebraica que después de diferenciada nos dará la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = K.$$

Regrese a la Sección 1 y con las expresiones restantes pruebe, por medio de la diferenciación, cuál de ellas es comparable con la ecuación diferencial original.

15 □

Su respuesta en la Sección 9,

$$h^2 = h_0^2 - \frac{2Q}{Kw} x^2,$$

es incorrecta. Si diferenciamos esta ecuación considerando h_0^2 como una constante, obtendremos

$$\frac{d(h^2)}{dx} = - \frac{2Q}{Kw} \cdot 2x,$$

empezamos, por lo tanto la ecuación de su respuesta no es la solución requerida. Regrese a la Sección 9 y elija otra respuesta. Tenga presente que la ecuación escogida deberá dar como resultado

$$\frac{d(h^2)}{dx} = - \frac{2Q}{Kw}$$

cuando es diferenciada.

porque la derivada de x^2 con respecto a x es $2x$. Este resultado no es la ecuación diferencial con la cual

16 □

Su respuesta en la Sección 40,

$$\frac{Q}{2\pi r b} = K \frac{d(h^2)}{dr},$$

es incorrecta. La Ley de Darcy indica que el flujo, dividido por el área de sección transversal, deberá ser proporcional a la gradiente de carga. Su res-

puesta expresa que el flujo, dividido por la sección, es proporcional a la gradiente del cuadrado de la carga. Por lo tanto no es una aplicación válida de la Ley de Darcy al problema.

Regrese a la Sección 40 y elija otra respuesta.

17 □

Su respuesta en la Sección 2 es incorrecta. La ecuación en la Sección 2 expresa que la derivada de la carga con respecto a $\ln r$ es una constante. Esta derivada es simplemente la pendiente del gráfico de h versus $\ln r$. Si tal gráfico cambia de pen-

diente, tal como en la respuesta que escogió, la derivada no podrá ser constante.

Regrese a la Sección 2 y elija otra respuesta.

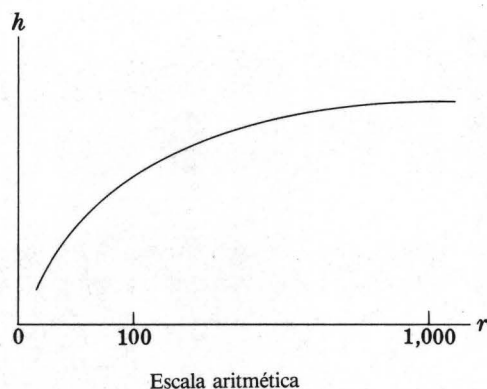
18 □

Su respuesta en la sección 38 es correcta. Así como el $\log r$ cambia con la misma magnitud entre 10 y 1, lo hace también entre 1000 y 100. La carga también cambia en la misma magnitud en estos dos intervalos. Si tuviésemos que reconstruir el gráfico de carga versus radio, r en vez de carga versus $\log r$, no obtendríamos una línea recta sino una curva "logarítmica" como se muestra en el gráfico. El gradiente pasa a ser cada vez más inclinado a medida que nos aproximamos al pozo para compensar la disminución del área de flujo. Esta forma logarítmica de delineación de carga se refiere algunas veces como "cono de depresión" en la superficie potenciométrica alrededor del pozo.

PREGUNTA

La ecuación obtenida en la sección 38 puede ser aplicada entre el radio de la isla, r_e , y el radio del pozo r_w , y obtener una expresión para la diferencia de altura de caída entre el pozo y el borde de la isla. Si h_e representa la carga al borde de la isla (es decir,

19 □



el nivel de la superficie de agua que rodea la isla) y h_w representa la carga en el pozo, ¿cuál de las siguientes expresiones resultará en este procedimiento?

| | | |
|--|-------------------|----|
| $h_e - h_w = \frac{2.3Q}{2\pi Kb} \log \frac{r_w}{r_e}$ | Pase a la sección | 28 |
| $h_e - h_w = \frac{2.3Q}{2\pi Kb} \log \frac{r_e}{r_w}$ | | 3 |
| $h_e - h_w = \frac{2.3Q}{2\pi Kb} (\log r_w - \log r_e)$ | | 30 |

Su respuesta en la Sección 8 es incorrecta. Si escribimos la solución a la ecuación

$$\frac{Q}{A} = -K \frac{dh}{dx}$$

en la forma más general, tendríamos

$$h = -\frac{Q}{KA} x + c,$$

donde c podría representar un término constante deseable. Indiferentemente al valor asignado a c , mientras sea constante (no depende de x), su deri-

vada respecto a x será cero. Por lo tanto, sin tomar en cuenta el valor de c , la diferenciación será

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{Q}{KA},$$

la cual es equivalente a la ecuación diferencial de interés. Fácilmente podremos asignar un número infinito de valores para c , y obtener un número infinito de ecuaciones distintas (soluciones) las cuales podemos diferenciar para obtener nuestra ecuación diferencial. Cada una de estas soluciones es la ecuación de una línea recta; es decir, cada una tiene una pendiente dh/dx , igual a $-(Q/KA)$, y cada una interseca el eje h en distintos puntos cuando $x = 0$. Cada punto de intersección es simplemente el valor de la constante c ya que si igualamos $x = 0$ en la solución obtendremos el valor de $h = c$.

Regrese a la Sección 8 y elija otra respuesta.

20 □

Su respuesta en la Sección 24 es incorrecta. De acuerdo a la Ley de Darcy, la descarga específica, Q/A , se obtiene por

$$\frac{Q}{A} = -K \frac{dh}{dx}.$$

Si la descarga específica aumenta cuando se aproxima a la corriente, la gradiente de carga dh/dx aumenta también—es decir, llega a tener mayor

pendiente—cuanto más se acerca a la corriente. Un gráfico de h versus distancia tendría la forma de una curva. En la explicación del problema en la Sección 24, la carga se describe como un aumento *linear* conforme se aleja de la corriente. Debido a que la carga aumenta en forma linear, dh/dx es constante.

Regrese a la Sección 24 y elija otra respuesta.

21 □

Su respuesta en la Sección 10,

$$h = - \frac{Q}{Kbw} x,$$

es incorrecta. Es verdad que la diferenciación de esta ecuación produce

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{Q}{Kbw},$$

la cual representa la ecuación diferencial original; pero no es suficiente como respuesta a nuestro problema. Si x se iguala a cero en la expresión

$$h = - \frac{Q}{Kwb} x,$$

obtenemos el resultado $h = 0$. Es decir, esta ecuación indica que cuando x es cero al borde de la corriente, la carga hidráulica también es cero. Sin

embargo, de acuerdo al concepto del problema, la carga es igual a h_0 , que es la elevación de la superficie de la corriente sobre el plano de referencia, cuando $x = 0$. La solución que requerimos, no solamente debe tener la propiedad de dar la misma ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{Q}{Kbw}$$

cuando es diferenciada; debe tener también la propiedad que la carga hidráulica sea igual a h_0 para un valor x igual a cero en la solución. Este es un ejemplo del significado de una *condición límite*; la solución debe satisfacer una cierta condición ($h = h_0$) para un cierto límite ($x = 0$) del problema.

Regrese a la Sección 10 y elija otra respuesta.

22 □

Su respuesta, $x = 2y + K$, en la Sección 1 es incorrecta. Podemos reordenar la ecuación elegida como sigue:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{K}{2}.$$

Diferenciando esta ecuación, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 1/2,$$

la cual no es la ecuación diferencial inicial. Requerimos la ecuación diferencial sea

$$\frac{dy}{dx} = K;$$

es decir, encontrar una ecuación algebraica, cuya diferenciación, produzca $dy/dx = K$.

Regrese a la Sección 1 y pruebe las respuestas restantes diferenciándolas para encontrar cuál de ellas satisface esta condición.

23 □

Su respuesta en la Sección 10,

$$h = h_0 - \frac{Q}{Kbw} x,$$

es correcta. La ecuación diferencial nos indica que un gráfico de h versus x dará una línea recta con pendiente

$$- \frac{Q}{Kbw};$$

en tanto que por los otros datos sabemos que para $x = 0$, h es igual a h_0 . Por lo tanto, para describir h en función de x necesitamos la ecuación de una línea recta, con h_0 como la ordenada en el origen y $-(Q/Kbw)$ como la pendiente. Podremos hacer dos pruebas para verificar que obtuvimos la solución correcta; primero diferenciamos la solución con respecto a x para ver si obtenemos la ecuación diferencial; segundo, consideramos x igual a cero en la solución para ver si la condición de $h = h_0$ en el punto $x = 0$ se satisface. Sólo si ambas pruebas satisfacen la ecuación se acepta ésta como la solución que requerimos. La condición que h sea igual a h_0 cuando $x = 0$ es un ejemplo de lo que comúnmente se denomina una *condición límite*. Ésta es una condición que expresa que h debe tener un cierto valor para cualquiera de los límites del problema. La ecuación diferencial,

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{Q}{Kbw},$$

no es por sí sola suficiente para definir la carga en función de x . Se ha establecido en el gráfico que h versus x es una línea recta con pendiente

24 □

$$- \frac{Q}{Kbw},$$

sin embargo, hay un número infinito de tales líneas rectas que se podrían trazar. La información adicional para la condición límite—que h debe corresponder a h_0 cuando $x = 0$ —nos permite elegir la línea recta particular requerida, al darnos su ordenada en el origen. Una condición límite representa entonces información acerca del valor de la carga para un punto conocido; éste proporciona una referencia a partir de la cual los cambios en carga (altura de caída) indicados por una ecuación diferencial pueden ser medidos. Los procesos de (1) diferenciación para establecer que una ecuación dada es una solución a una ecuación diferencial y (2) de aplicación a las condiciones límites para establecer que ésta representa la solución particular que se requiere, pueden ser aplicados a problemas mucho mas complejos que el considerado aquí.

PREGUNTA

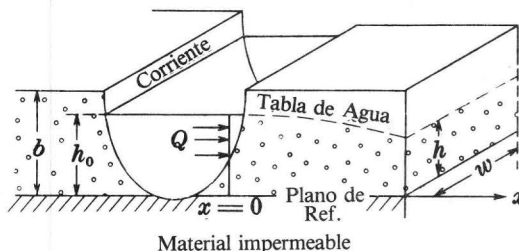
Supongamos que al medir un pozo de observación que sondea un acuífero confinado, observamos un aumento lineal en la altura piezométrica conforme se aleja del río o canal que surcan el acuífero y supongamos que este patrón permanece igual por un período considerable. ¿Cuál de las siguientes conclusiones pueden ser inferidas en base a esta evidencia?

Pase a la Sección:

- | | |
|---|----|
| No existe flujo en el acuífero. | 42 |
| Existe un flujo permanente a través del acuífero hacia el río. | 25 |
| Se presenta en el acuífero un flujo cuyo caudal específico aumenta conforme se aproxima al río. | 21 |

Su respuesta en la Sección 24 es correcta e ilustra la utilidad dual de las ecuaciones de flujo en la hidráulica de aguas subterráneas. Éstas nos permiten predecir la distribución de carga asociada con varias condiciones de flujo y elaborar conclusiones sobre el flujo de aguas subterráneas en base a la distribución de carga obtenida en el campo.

Supongamos ahora que consideramos un acuífero en el cual el flujo no es confinado, así que el límite superior del sistema de flujo en cualquier punto es la superficie del agua misma. Consideramos, otra vez, un flujo uniforme alejado de la corriente, como se muestra en el diagrama. Es conveniente en este caso tomar la base del acuífero no confinado como el plano de referencia de la altura de caída. Asumimos que los componentes verticales de flujo son insignificantes. Esta suposición nunca es enteramente satisfecha porque el movimiento no puede ser totalmente lateral dentro y cerca de la superficie libre ya que la superficie misma puede ser inclinada. Sin embargo, frecuentemente el componente vertical de la velocidad es pequeño comparado al movimiento lateral y por lo tanto insignificante, tal como se considera aquí. Una diferencia importante entre este problema y el problema de flujo confinado es que en este caso la sección de área transversal de flujo disminuye a lo largo de la trayectoria de flujo a medida que h disminuye, mientras que en el caso del problema de flujo confinado el área permanece constante. A lo largo de un borde de la corriente con una longitud w , la infiltración dentro del acuífero ocurre a una



razón de $2Q$; y asumimos que la mitad de esta infiltración se mueve hacia la derecha, hacia la parte del acuífero mostrada en el diagrama.

PREGUNTA

De acuerdo a la suposición explicada anteriormente, ¿cuál de las siguientes relaciones es obtenida al aplicar la Ley de Darcy a este problema?

Pase a la Sección:

$$Q = -Kxw \frac{dh}{dx} \quad 26$$

$$\frac{Q}{bw} = -K \frac{dh}{dx} \quad 43$$

$$Q = -Kwh \frac{dh}{dx} \quad 9$$

25 □

Su respuesta en la Sección 25,

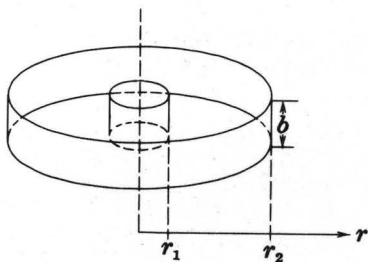
$$Q = -Kxw \frac{dh}{dx},$$

es incorrecta. La Ley de Darcy expresa el flujo como el producto de la conductividad hidráulica, el área de flujo y la gradiente de carga (negativa). Refiriéndose al diagrama de la Sección 25, el área de flujo—o sea la sección de área transversal

tomada en ángulo recto a la dirección del movimiento—puede ser considerada igual a wh . En la respuesta que ha elegido, el término xw aparece como el área de flujo.

Regrese a la Sección 25 y elija otra respuesta.

26 □



Su respuesta, $2\pi r b$, en la Sección 41 es correcta. El flujo es radial hacia adentro en la dirección negativa, r —es decir, paralelo al eje r de las coordenadas polares. El área de sección transversal de flujo es una superficie, la cual es en todos sus puntos perpendicular a la dirección del flujo, por lo cual es una superficie cilíndrica y su área se expresa en función del área de un cilindro.

A medida que se avanza hacia adentro a lo largo de la trayectoria de flujo, el área cilíndrica de flujo en este problema disminuye; como se muestra en la figura. Esto se hace evidente en nuestra expresión

27 □

Su respuesta en la Sección 19,

$$h_e - h_w = \frac{2.3Q}{2\pi K b} \log \frac{r_w}{r_e},$$

es incorrecta. Si permitimos que h_e y r_e sean reemplazadas por h_2 y r_2 , y dejamos que h_w y r_w sean

28 □

Su respuesta en la Sección 7 es incorrecta. La ecuación diferencial

$$\frac{Q}{A} = -K \frac{dh}{dx},$$

29 □

sión para el área de la sección, la cual indica que cuando r decrece, el área deberá disminuir.

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes declaraciones es correcta?

Pase a la Sección:

- (a) Cuando el área de la sección disminuye, el radio también disminuye. Estos factores se combinan en tal forma que la gradiente hidráulica permanece constante. 11
- (b) El área de la sección disminuye a lo largo de la trayectoria del flujo, mientras el caudal permanece constante, por lo tanto la carga hidráulica debe aumentar a lo largo de la trayectoria de flujo. 40
- (c) El área de la sección disminuye a lo largo de la trayectoria de flujo, pero es compensada por la convergencia de las líneas de flujo hacia el pozo y ningún aumento de la gradiente hidráulica ocurre. 32

h_1 y r_1 , su respuesta puede ser expresada en la siguiente forma

$$h_2 - h_1 = \frac{2.3Q}{2\pi K b} \log \frac{r_1}{r_2}.$$

Comparando esta ecuación con las expresadas en la Sección 38 se demuestra que esta no es la forma requerida.

Regrese a la Sección 19 y elija otra respuesta.

puede ser reordenada a

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{Q}{KA}.$$

Para que las tres expresiones citadas sean soluciones a esta ecuación, las tres tendrían que producir $-(Q/KA)$ como la derivada de h respecto a x .

Pero si diferenciamos la expresión (c), por ejemplo, la cual fue

$$h = h_0 - \frac{Q}{KA} x^2 + 7,$$

obtenemos

$$\frac{dh}{dx} = \frac{-2Q}{KA} x,$$

que no representa la ecuación diferencial indicada. Por lo tanto podemos observar que al menos (c) no satisface la ecuación de interés.

Regrese a la Sección 7 y pruebe las otras expresiones por diferenciación para obtener la respuesta correcta.

Con.—29 □

Su respuesta en la Sección 19,

$$h_e - h_w = \frac{2.3Q}{2\pi Kb} (\log r_w - \log r_e),$$

es incorrecta. El término $\log r_e$ será, obviamente, más grande que $\log r_w$, ya que r_e es mucho mayor que r_w . Por lo tanto, la expresión a la derecha en su respuesta será negativa, implicando que h_w es

más grande que h_e . Esto no tiene sentido alguno; la altura de caída (altura piezométrica) de un pozo que se vacía no puede ser mayor que la altura en el radio de influencia del pozo.

Regrese a la Sección 19 y elija otra respuesta.

30 □

Su respuesta en la Sección 2 es incorrecta. Si se observan cambios iguales en la carga a intervalos que representan cambios iguales en r , podríamos escribir

$$\frac{\Delta h}{\Delta r} = \text{constante},$$

donde Δh es el cambio de carga observado sobre cualquier intervalo de ancho radial Δr . Su derivada sería

$$\frac{dh}{dr} = \text{constante},$$

que no es la condición que se aplica a este problema. La condición que nuestro gráfico debe satisfacer, es más bien

$$\frac{dh}{d(\ln r)} = \text{constante}.$$

Regrese a la Sección 2 y elija otra respuesta.

31 □

Su respuesta en la Sección 27 es incorrecta. La convergencia de las líneas de flujo hacia el pozo no compensa la disminución del área de flujo; es más bien, ocasionada por la disminución de área de flujo. La disminución del área de flujo al aproximarse al pozo es una característica fundamental del problema de descarga de pozo; en efecto, esta disminución

tiene una influencia dominante sobre la forma de distribución de carga alrededor del pozo.

Regrese a la Sección 27 y elija otra respuesta.

32 □

Su respuesta en la Sección 40,

$$\frac{Q}{A} = K \frac{dh}{dx},$$

33 ☐

es incorrecta. La coordenada x , no es utilizada en nuestro análisis de este problema; no establecimos un eje x a lo largo del cual la carga podría variar. La respuesta elegida implica una derivada de la carga con respecto a x el cual no es aplicable al problema.

Regrese a la Sección 40 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 38 es incorrecta. La ecuación

$$h_2 - h_1 = \frac{2.3Q}{2\pi Kb} \cdot \log \frac{r_2}{r_1},$$

34 ☐

indica que si la relación r_2/r_1 —es decir, la relación del radio exterior con radio interior—es la misma para dos intervalos diferentes, entonces las caídas de las dos cargas en estos intervalos deberán ser iguales. Para los dos intervalos mencionados en la respuesta que usted escogió, estas relaciones son 10/1 y 1,000/100.

Regrese a la Sección 38 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 40 es correcta. La gradiente hidráulica aquí es dh/dr , debido a que el flujo ocurre en la dirección de r . Asumimos simetría radial alrededor del pozo, así que la coordenada polar angular θ , no tiene que figurar. Reordenamos la ecuación elegida por usted y la escribimos de la siguiente manera:

$$r \frac{dh}{dr} = \frac{Q}{2\pi Kb},$$

y concentramos nuestra atención momentáneamente en el término de la izquierda. De acuerdo a las reglas de diferenciación podemos escribir:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{dh}{d(\ln r)} \cdot \frac{d(\ln r)}{dr},$$

35 ☐

donde $\ln r$ indica el logaritmo neperiano de r . Por cálculo infinitesimal la derivada de $\ln r$ con respecto a r se obtiene por

$$\frac{d(\ln r)}{dr} = \frac{1}{r}.$$

PREGUNTA

Utilizando estas expresiones, ¿cuál de las siguientes puede ser obtenida como expresión correcta de la ecuación diferencial para el problema?

Pase a la Sección:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{Q(\ln r)}{2\pi Kb} \quad 39$$

$$\frac{dh}{d(\ln r)} = \frac{Q}{2\pi Kb} \quad 2$$

$$(\ln r) \frac{dh}{dr} = \frac{Q}{2\pi Kb} \quad 13$$

Su respuesta en la Sección 10,

$$h = 2Q - \frac{Q}{Kwb} x,$$

es incorrecta. Esta respuesta es en realidad una solución a nuestra ecuación diferencial, por cuanto al diferenciar se obtiene la ecuación

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{Q}{Kbw}.$$

Sin embargo, si establecemos que x es igual a cero en la respuesta elegida, encontramos que la carga hidráulica h es igual a $2Q$ en el punto donde x es igual a cero—es decir, al borde de la corriente.

Sin embargo, en la discusión de la Sección 10 se afirmó que la carga hidráulica era igual a h_0 al borde de la corriente—siendo h_0 la elevación de la superficie de la corriente sobre el plano de referencia. Este problema ilustra el significado del término *condición límite*; la solución debe satisfacer una condición a lo largo de un borde ($h = h_0$ para $x = 0$) además de satisfacer la ecuación diferencial dada. Existe un número infinito de posibles soluciones a la ecuación diferencial anterior, únicamente una ecuación satisface a las condiciones límites requeridas.

Regrese a la Sección 10 y elija otra respuesta.

36 □

Su respuesta en la Sección 38 es incorrecta. Si la ecuación

$$h_2 - h_1 = \frac{2.3Q}{2\pi Kb} \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right),$$

se aplica a los dos intervalos en cuestión, tendremos

$$h_{10} - h_1 = \frac{2.3Q}{2\pi Kb} \log \left(\frac{10}{1} \right) = \frac{2.3Q}{2\pi Kb} \cdot 1$$

y

$$h_{100} - h_{10} = \frac{2.3Q}{2\pi Kb} \log \left(\frac{100}{10} \right) = \frac{2.3Q}{2\pi Kb} \cdot 1.$$

Regrese a la Sección 38 y elija otra respuesta.

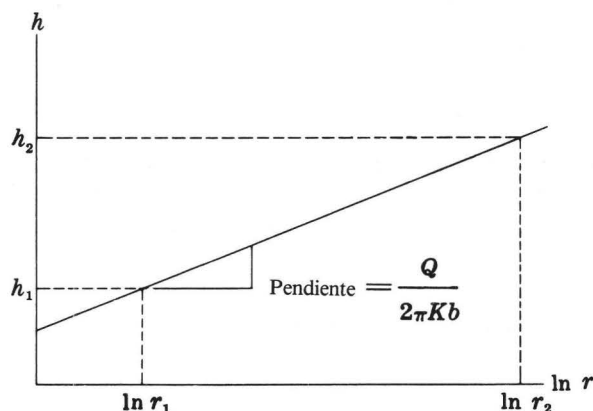
37 □

Su respuesta en la Sección 2 es correcta. La ecuación expresa que la derivada de h con respecto a $\ln r$ es una constante. Por lo tanto, un gráfico de h versus $\ln r$ sería una línea recta con una pendiente igual a

$$\frac{Q}{2\pi Kb}.$$

El gráfico muestra tal figura. A medida que $\ln r$ cambia de $\ln r_2$ a $\ln r_1$ la carga decrece de h_2 a h_1 y como para cualquier función de una línea recta se puede obtener el cambio en altura de caída multiplicando el cambio en la variable independiente por la pendiente de la línea, es decir,

$$h_2 - h_1 = \frac{Q}{2\pi Kb} (\ln r_2 - \ln r_1).$$



38 □

Esto puede escribirse en la forma equivalente

$$h_2 - h_1 = \frac{Q}{2\pi K b} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

por cuanto la diferencia entre $\ln r_2$ y $\ln r_1$ es simplemente el logaritmo del cociente $\ln (r_2/r_1)$. Ahora es conveniente cambiar de logaritmos neperianos a logaritmos comunes. Esto solamente requiere multiplicar por una constante—es decir $\ln r = 2.3 \log r$, donde $\log r$ indica el logaritmo común o logaritmo de base 10. Efectuando el cambio, la ecuación toma la forma

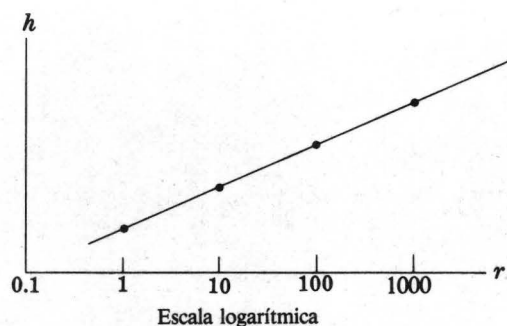
$$h_2 - h_1 = \frac{2.3Q}{2\pi K b} \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

6

$$h_2 - h_1 = \frac{2.3Q}{2\pi K b} (\log r_2 - \log r_1).$$

Nuevamente un gráfico de h versus $\log r$ puede ser dibujado o para mayor conveniencia, se contruye un gráfico de h versus r en papel semilogarítmico tal como se muestra en la figura. Debido a que

38 □ — Con.



multiplicamos por una constante, el gráfico continúa siendo una línea recta.

PREGUNTA

En base al gráfico mostrado y a las ecuaciones presentadas anteriormente, ¿cuál de las siguientes declaraciones es correcta?

Pase a la Sección:

- (a) La caída de carga (altura) entre $r = 10$ y $r = 1$ es igual a la caída de carga entre $r = 1000$ y $r = 100$. 19
- (b) La caída de carga entre $r = 10$ y $r = 1$ es menor que la caída entre $r = 1000$ y $r = 100$. 34
- (c) La caída de carga entre $r = 10$ y $r = 1$ es mucho más grande que la caída entre $r = 100$ y $r = 10$. 37

Su respuesta en la Sección 35,

$$\frac{dh}{dr} = \frac{Q(\ln r)}{2\pi K b},$$

es incorrecta. Las siguientes relaciones se dan en la Sección 35:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{dh}{d(\ln r)} \cdot \frac{d(\ln r)}{dr}$$

y

$$\frac{d(\ln r)}{dr} = \frac{1}{r}.$$

Combinando estas relaciones,

$$\frac{dh}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dh}{d(\ln r)}.$$

En la pregunta de la Sección 35, el propósito es substituir el término

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dh}{d(\ln r)}$$

por el término

$$\frac{dh}{dr}$$

en la ecuación diferencial de nuestro problema. Regrese a la Sección 35 y elija otra respuesta.

39 □

Su respuesta en la Sección 27 es correcta. La disminución del área de la sección, de acuerdo a la Ley de Darcy, deberá ser acompañada por un empinamiento de la gradiente hidráulica. Cuando aplicamos la Ley de Darcy a este problema, omitiremos el signo negativo usual. Esto se hace porque Q , la descarga del pozo, tiene que tener un signo negativo en este problema, ya que está orientado hacia el pozo en dirección en que decrece el valor de r . El signo negativo de Q combinado con el signo negativo utilizado por convención en la Ley de Darcy, produce una ecuación en términos positivos.

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones es una aplicación válida al problema, por tanto una ecuación diferencial del mismo?

Pase a la Sección:

$$\frac{Q}{A} = K \frac{dh}{dx} \quad 33$$

$$\frac{Q}{2\pi Kb} = K \frac{dh}{dr} \quad 35$$

$$\frac{Q}{2\pi rb} = K \frac{d(h^2)}{dr} \quad 17$$

40 □

Su respuesta en la Sección 9,

$$h^2 = h_0^2 - \frac{2Q}{K_w} x,$$

es correcta. La solución indica que en este caso h tendrá la forma de una parábola cuando se construye un gráfico de h versus x . La inclinación parabólica de la gradiente hidráulica compensa la disminución progresiva en el área de flujo, de tal manera que la Ley de Darcy se satisface siempre. Esta teoría aproximativa al flujo no confinado fue introducida por Dupuit (1863) y la suposición que comprende es referida como la hipótesis de Dupuit. Si este método se usa en casos donde estas suposiciones no se aplican, se pueden cometer serios errores.

Ahora consideraremos otro problema, en el cual el área de la sección de flujo disminuye a lo largo de la trayectoria de flujo, conduciendo a una declinación progresiva de la gradiente hidráulica. En este caso, sin embargo, la disminución del área

es generada por la geometría cilíndrica y no por la pendiente de una superficie libre.

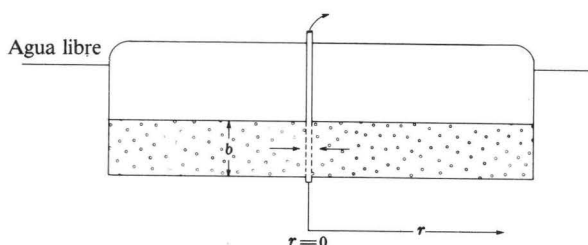
La figura muestra un pozo localizado en el centro de una isla de forma circular. El pozo atraviesa un acuífero confinado, cuya recarga proviene del agua libre alrededor del perímetro de la isla. Durante el bombeo el agua fluye radialmente hacia el pozo. Asumimos que el agua libre alrededor de la isla mantiene la carga a un nivel constante a lo largo de la periferia del acuífero y que la recarga a lo largo de este perímetro iguala a la descarga del pozo. Debido a que el pozo se encuentra al centro de la isla, la cual es circular, asumiremos que la simetría cilíndrica prevalecerá, por lo tanto podremos introducir las coordenadas polares para simplificar el problema.

PREGUNTA

Si b representa el espesor del acuífero, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el área de la sección de flujo a una distancia radial r del eje del pozo?

Pase a la Sección:

$$\begin{array}{ll} 2\pi rb & 27 \\ \pi r^2 b & 12 \\ 2\pi r^2 & 6 \end{array}$$



41 □

Su respuesta en la Sección 24 es incorrecta. La expresión indicando un aumento lineal en la carga a mayor distancia de la corriente implica que existe una pendiente *que no es cero*, dh/dx , en la superficie potenciométrica y esto a su vez implica que existe flujo en el acuífero. La Ley de Darcy expresa que

$$Q = -KA \frac{dh}{dx}.$$

La conductividad hidráulica, K , podría ser muy baja pero no se considera igual a cero, en tanto se trate de un acuífero. Por lo tanto, para que Q sea cero en un área A , la gradiente de carga dh/dx perpendicular a A deberá ser cero. En este caso, se observa una gradiente de carga que no es igual a cero en el acuífero, así que sabemos que existe flujo de alguna magnitud en el acuífero.

Regrese a la Sección 24 y elija otra respuesta.

42 □

Su respuesta en la Sección 25,

$$\frac{Q}{bw} = -K \frac{dh}{dx},$$

es incorrecta. Usted ha tomado el área de la sec-

ción de flujo como bw —es decir, el producto del espesor del acuífero por el ancho de la sección. Observando la figura de la Sección 25, se nota que ésta no representa el área real del flujo. El acuífero no está saturado en su espesor total, sino a una distancia h sobre la base del acuífero, por lo tanto la verdadera área de flujo es wh , en vez de bw .

Regrese a la Sección 25 y elija otra respuesta.

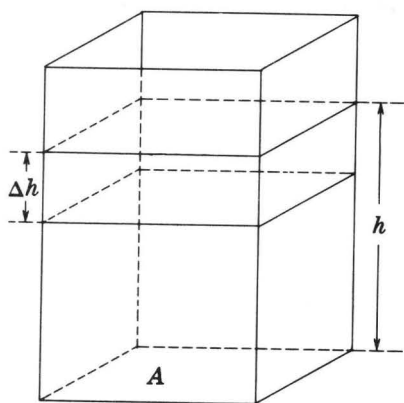
43 □

Parte IV—Almacenamiento del agua subterránea

Introducción

En las Partes II y III, tratamos con acuíferos y medios porosos únicamente como conductos; es decir, consideramos solamente sus propiedades relacionadas a la transmisión del agua en un flujo continuo. Los acuíferos tienen otra propiedad hidráulica muy importante que es el almacenamiento de agua. En la Parte IV, examinaremos esta propiedad de almacenamiento del agua subterránea y desarrollaremos una ecuación para descri-

birla. En la Parte V, desarrollaremos las ecuaciones diferenciales para un caso simple de flujo de no-equilibrio combinando la ecuación de almacenamiento con la Ley de Darcy, por medio de la ecuación de continuidad, la cual es una expresión del principio de conservación de masa. En la Parte VI, repetiremos este proceso para el caso de flujo radial de no-equilibrio a un pozo para obtener una solución importante a la ecuación diferencial resultante.



La figura muestra un tanque abierto, de base, cuadrada A . Si un volumen de agua, ΔV , es vaciado en el tanque, el nivel de agua aumentará por un incremento Δh de tal forma que $\Delta V = A \cdot \Delta h$. El volumen total, V , de agua almacenada en el tanque en cualquier momento puede ser determinado midiendo la profundidad, h , del agua en el tanque y multiplicando esta profundidad por A .

PREGUNTA

Supongamos que se construye un gráfico del volumen total de agua almacenada versus el nivel de agua en el tanque, de tal manera que el volumen asociado con cualquier nivel de agua se lea directamente de la figura. El gráfico será:

Pase a la Sección:

(a) una parábola con pendiente $\frac{\Delta V}{\Delta h}$ 10

(b) una línea recta con pendiente

$\frac{\Delta V}{\Delta h} = A$ 11

(c) una curva logarítmica 9

Su respuesta en la Sección 26 es incorrecta. El volumen de agua presente en la arena al comienzo fue hAn . Una cierta fracción, β , del volumen de este fluido fue drenado por gravedad, dejando la frac-

ción $1-\beta$, aún ocupada por el fluido. Por lo tanto, β representa la fracción del espacio poroso total, por debajo del nivel h , que ya no contiene agua, la cual debe ser llenada para resaturar la arena hasta el nivel h . Es decir, para resaturar la arena hasta el nivel h , tendrá que ser bombeado al tanque un volumen de agua igual al volumen del espacio poroso. Regrese a la Sección 26 y elija otra respuesta.

2

Su respuesta en la Sección 21 es incorrecta. En el experimento imaginario descrito en la Sección 21, se expresaba que duplicando el área de la base del prisma tenía el efecto de duplicar la pendiente del

gráfico V, h —es decir, se duplicaba el término dV/dh . Por lo tanto, dV/dh depende del tamaño del prisma en cuestión, como también depende del tipo del material del acuífero; entonces no puede ser considerado como una constante representativa del material del acuífero. Regrese a la sección 21 y elija otra respuesta.

3

Su respuesta en la Sección 16,

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{dV}{dh} = n\beta,$$

es incorrecta. No toma en cuenta el efecto de la base del área A , del tanque. Hemos visto que cuando el tanque es drenado por gravedad y posteriormente resaturado hasta el nivel h , la relación entre V y h es

$V = hAn\beta$, donde n es la porosidad de la arena y β la fracción del agua en la arena que puede ser drenada por gravedad. Ahora, si en vez, de drenar la arena hasta el fondo del tanque, simplemente extraemos un volumen pequeño de agua, ΔV , así que el nivel de agua en el tanque desciende una pequeña proporción Δh , deberíamos considerar que ΔV y Δh están relacionados en la misma forma como V y h en nuestro experimento anterior. Si resaturamos la arena por incrementos, después de haber sido previamente saturada y luego drenada por gravedad, se deberá mantener la misma relación.

Regrese a la Sección 16 y elija otra respuesta.

4

Su respuesta en la Sección 20 es incorrecta. Si cada pozo penetró ambos acuíferos, no hay razón para que la reacción de los dos pozos sea diferente. La forma de reacción podría ser difícil de

predecir, pero al menos debería ser aproximadamente la misma para cada pozo. Tenga en cuenta que el coeficiente de almacenamiento de la zona artesiana será probablemente más pequeño que el rendimiento específico del acuífero libre al menos por dos órdenes de magnitud.

Regrese a la Sección 20 y elija otra respuesta.

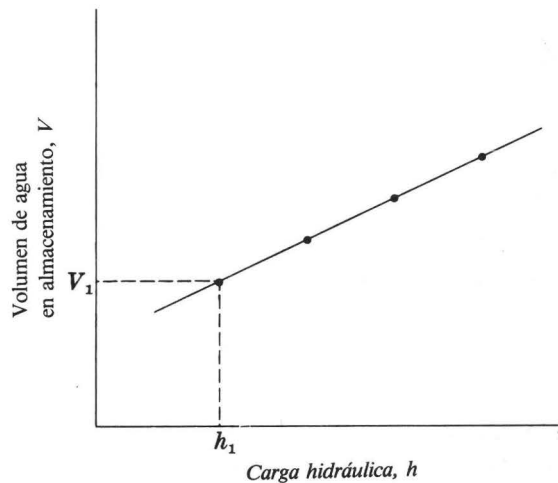
5

Su respuesta en la Sección 32 es correcta. Las cifras de rendimiento específico para acuíferos de materiales normales varían entre 0.01 y 0.35. Es común referirse al rendimiento específico de un acuífero no confinado en su totalidad; pero debería notarse que el proceso de extracción de un almacenamiento no confinado ocurre realmente en el nivel superior del agua. Si el nivel de agua desciende o sube dentro de un acuífero a capas o estratos con diferentes propiedades hidráulicas, el rendimiento específico debe cambiar. Además, es evidente que el rendimiento específico puede variar en relación a la localización en el plano como consecuencia de las condiciones geológicas locales.

El almacenamiento no confinado es probablemente el mecanismo más importante para el almacenamiento de agua subterránea desde un punto de vista económico, aunque no es el único. Efectos de almacenamiento han sido observados también en acuíferos confinados o artesianos. El mecanismo del almacenamiento confinado depende, al menos en parte, de la expansión y compresión del agua misma y de la estructura porosa del acuífero; por estas razones el almacenamiento confinado algunas veces se refiere como almacenamiento compresivo. En nuestro esquema no haremos un análisis de los mecanismos de almacenamiento confinado, pero nos concentraremos en desarrollar una descripción matemática de sus efectos, ade-

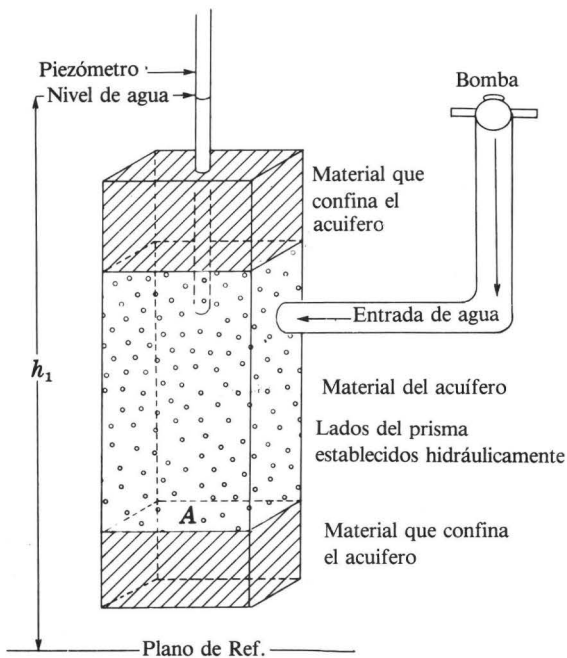
cuados para cálculos hidrológicos. Presentaciones sobre los mecanismos de almacenamiento confinado son tratadas por Jacob (1950, pág. 328-334) y por Cooper (1966).

El diagrama muestra un prisma vertical extendido a través de un acuífero uniforme, confinado. El área de la base del prisma es A . Aunque el prisma estructuralmente es parte del acuífero confinado, suponemos que está aislado hidráulicamente del resto del acuífero por barreras hidráulicas imaginarias, para que el agua añadida al prisma permanezca en el mismo. Además suponemos que disponemos de un método de bombear agua hacia adentro del prisma en incrementos medidos, y que contamos con un piezómetro como se muestra en el diagrama, con el cual podemos medir la carga dentro del prisma.



PREGUNTA

Supongamos que la carga se encuentra inicialmente al nivel h_1 que está por sobre la parte superior del acuífero, indicando no solamente que el prisma está saturado, sino también bajo presión hidrostática confinada. Designamos el volumen de agua almacenada bajo esta condición como V_1 . Ahora, supongamos que se bombea más agua en el prisma por incrementos y que la carga se mide después de cada incremento, luego se dibuja el volumen de agua almacenada versus la carga hidráulica en el prisma. Si el gráfico resultante tiene la forma mostrada en la figura, ¿cuál de las siguientes expresiones aceptaría como válida?



Pase a la Sección:

- | | |
|---|---|
| <p>(a) La rapidez de cambio de volumen de agua en el almacenamiento confinado, con respecto a la carga hidráulica, h, es constante; esto es, $dV/dh = \text{constante}$. 21</p> | <p>(b) La rapidez de cambio de carga hidráulica con respecto al volumen almacenado depende del volumen almacenado 23</p> <p>(c) La rapidez de cambio del volumen en almacenamiento con respecto al área de la base del prisma, es igual a Δh. 30</p> |
|---|---|

6—Con.

Su respuesta en la Sección 32 es incorrecta. Un concepto muy importante omitido en la definición que usted eligió es que el rendimiento específico se refiere al área de base unitaria del acuífero. La definición elegida por usted se refiere al volumen

7

Su respuesta en la Sección 25 es incorrecta. La relación presentada en la Sección 25 para la rapidez de desalojo de agua del almacenamiento era

$$\frac{dV}{dt} = SA \frac{dh}{dt}$$

donde S es el coeficiente de almacenamiento, A el área del acuífero en consideración, y dh/dt la proporción de cambio de carga con tiempo dentro de esa área del acuífero. En la pregunta de la Sección

8

Su respuesta en la Sección 1 es incorrecta. Cada vez que añadimos un volumen determinado de agua al tanque—digamos 10 pies cúbicos—el nivel de agua debe ascender por una cantidad fija correspondiente. Si el área de la base del tanque es de 5 pies cuadrados, añadir 10 pies cúbicos de agua deberá producir siempre un aumento de 2 pies en

9

de agua que puede ser drenado *del acuífero*—el cual varía en relación a la extensión del acuífero y es por lo general una cantidad muy grande. Como deseamos que el rendimiento específico represente una propiedad del material del acuífero, definiremos éste en términos de volumen que puede ser drenado por unidad de área de mapa del acuífero.

Regrese a la Sección 32 y elija otra respuesta.

25, el rendimiento específico del nivel de agua del acuífero se dió como 0.20 y la proporción de descenso del nivel de agua en el pozo poco profundo se dió como 0.5 pies por día. El área superficial de una sección del acuífero dentro de un radio de 10 pies del pozo sería $\pi \times 10^2$, ó 314 pies cuadrados. La proporción de desalojo del almacenamiento en esta sección será por lo tanto

$$\frac{dV}{dt} = SA \frac{dh}{dt} = 0.2 \times 314 \times 0.5$$

$$= 31.4 \text{ pies cúbicos por día}$$

Regrese a la Sección 25 y elija otra respuesta.

h ; añadir 15 pies cúbicos de agua deberá producir un aumento de 3 pies en h ; y así sucesivamente. La relación $\Delta V/\Delta h$ en este caso deberá ser siempre 5. En otras palabras, la relación $\Delta V/\Delta h$ es constante y es igual al área de la base A , del tanque.

Si dibujamos V versus h , la pendiente de este gráfico será $\Delta V/\Delta h$, por definición. Como hemos visto anteriormente, esta pendiente debe ser una constante. Una curva logarítmica no presenta una pendiente constante.

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 1 es incorrecta. El incremento en el volumen de agua dentro del tanque que resulta de un incremento en el nivel de agua Δh , se obtiene por $\Delta V = A\Delta h$. Por lo tanto,

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = A$$

donde A , el área de la base del tanque es una constante. Si construimos un gráfico de V , el volumen

del agua del tanque, versus h , que es el nivel en el tanque, la pendiente del gráfico por definición será $\Delta V/\Delta h$; pero como $\Delta V/\Delta h$ es una constante, el gráfico no puede ser una parábola. La pendiente de una parábola cambia constantemente a lo largo de su trazo.

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

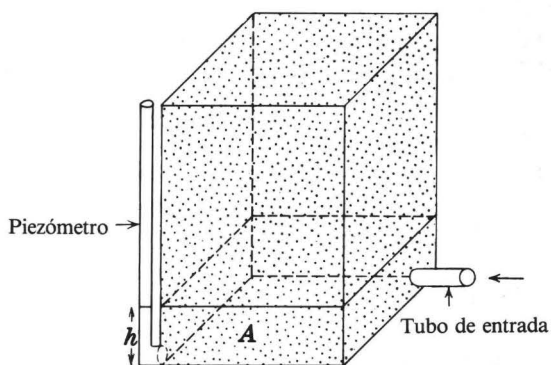
10

Su respuesta en la Sección 1 es correcta. La pendiente del gráfico, $\Delta V/\Delta h$ ó dV/dh , es constante e igual a A . Además, el volumen del agua almacenada por pie de carga (nivel del agua) en el tanque es A .

Ahora considere el tanque mostrado en el dibujo. Es similar al utilizado anteriormente, excepto que está lleno con arena seca y tiene una porosidad interconectada (efectiva) denominada como n . El tanque está abierto en la parte superior y tiene una base de área A . El agua puede ser bombeada dentro del tanque a través de un tubo conectado en su base, y el nivel del agua dentro del tanque—es decir, el nivel de saturación de la arena—puede ser medido utilizando un piezómetro, que también está conectado en la base del tanque.

PREGUNTA

Supongamos que bombeamos un pequeño volumen de agua, V , dentro del tanque y observamos el nivel, h , que corresponde al ascenso de agua en el piezómetro. Sin tomar en cuenta ninguno de los efectos de capilaridad, ¿cuál de las siguientes expresiones constituiría una relación válida entre



el volumen de agua bombeada dentro del tanque y el ascenso del nivel de agua sobre la base del tanque?

Pase a la Sección:

| | |
|-----------|----|
| $V = Ah$ | 31 |
| $h = VAn$ | 12 |
| $V = hAn$ | 14 |

11

Su respuesta en la Sección 11 es incorrecta. Si el agua asciende a un nivel h sobre la base del tanque, el volumen total de arena saturada (sin tomar en cuenta efectos capilares) será hA . Este volumen total tendrá que ser multiplicado por la porosidad para obtener el volumen total de espacio poroso saturado. Un repaso de la definición de

porosidad como fue dada en la Parte I podría ayudarle a clarificar este concepto.

Regrese a la Sección 11 y elija otra respuesta.

12

Su respuesta en la Sección 25 es correcta. El desalojo del almacenamiento en un área específica en el nivel superior del agua del acuífero se expresa por

$$\frac{dV}{dt} = S_y A \frac{dh}{dt} = 0.2 \times A \times 0.5 = 0.1A.$$

El desalojo del almacenamiento de un área igual a la del acuífero artesiano sería

13

Su respuesta, $V = hAn$, en la Sección 11 es correcta. Supongamos ahora que se añada agua al tanque en incrementos, y h es medida después de cada adición; y supongamos que se construye un gráfico de V versus h , donde V es el volumen total o acumulado que ha sido añadido, y h es el nivel de agua en el tanque.

PREGUNTA

Otra vez, sin tomar sin cuenta los efectos capilares, el gráfico resultante será:

14

Su respuesta en la Sección 20 es incorrecta. El caudal específico del nivel superior del agua del acuífero será, por lo general, más grande que el coeficiente de almacenamiento en la zona artesiana al menos por dos órdenes de magnitud. Una fluctuación estacional en el bombeo generalmente implicará una descarga corta del almacenamiento o un período corto de acumulación en el almace-

15

$$\frac{dV}{dt} = SA \frac{dh}{dt} = 2 \times 10^{-4} \times A \times 5 = 0.001A.$$

Entonces, la contribución del nivel superior del agua excede al desalojo en el acuífero artesiano por un factor de 100.

Así se completa la parte introductoria a la discusión sobre almacenamiento en el acuífero. Puede proceder con la Parte V, en la cual combinaremos el concepto de almacenamiento en el acuífero con la Ley de Darcy, utilizando la ecuación de continuidad, para desarrollar la ecuación diferencial para un problema simple en flujo de no-equilibrio en aguas subterráneas.

Pase a la Sección:

(a) una línea recta con pendiente

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{1}{An}, \quad 17$$

(b) una línea recta con pendiente

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = An, \quad 26$$

(c) una curva logarítmica con una pendiente que depende de h .

22

namiento. Los dos acuíferos se bombean más o menos al mismo ritmo; de esta manera ajustes estacionales en el bombeo serán presumiblemente de la misma magnitud para cada uno. Sin embargo, la reacción de los dos acuíferos al bombeo (o acumulación) de un volumen similar de agua será completamente diferente y se regirá por sus coeficientes de almacenamiento. El acuífero con mayor coeficiente de almacenamiento podrá soportar el bombeo con menor descenso del nivel de agua que el acuífero con menor coeficiente de almacenamiento.

Regrese a la Sección 20 y elija otra respuesta.

Su respuesta, $V = hAn\beta$, en la Sección 26 es correcta. Esta expresión nos da el volumen de agua desplazada al drenar el tanque por gravedad, y el volumen que se debe añadir para saturar la arena al nivel original, suponiendo que la fracción retenida por las fuerzas capilares es constante.

PREGUNTA

Consideremos, bajo la misma suposición, que el tanque es drenado por remoción de incrementos de agua (o resaturado por adición de incrementos de agua) y se construye un gráfico del volumen de agua en el almacenamiento, V , versus el nivel de saturación, h , de los resultados del experimento.

¿Cuál de las siguientes expresiones podría describir la pendiente del gráfico resultante?

Pase a la Sección:

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{dV}{dh} = n\beta \quad 4$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{dV}{dh} = An\beta \quad 33$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{dV}{dh} = hAn\beta \quad 29$$

16

Su respuesta en la Sección 14 es incorrecta. Hemos visto que si un volumen de agua, V , es bombeado hacia el interior del tanque cuando la arena está seca, la ecuación

$$V = h \cdot A \cdot n,$$

describe la relación entre V y el nivel de agua en la arena h . Si la arena está ya saturada hasta cierto nivel, y se bombea un volumen adicional de agua,

ΔV , el nivel de agua ascenderá por un incremento Δh , tal que

$$\Delta V = \Delta h \cdot A \cdot n.$$

Regrese a la Sección 14 y use esta relación para elegir otra respuesta.

17

Su respuesta en la Sección 26 es incorrecta. $h \cdot A \cdot n$ representaría el volumen de agua que se requiere para elevar el nivel de agua a una altura h sobre la base del tanque, *si la arena estuviese inicialmente seca*. Sin embargo, en este caso la arena no está seca. Algunos de los espacios porosos estarían ya ocupados por agua al inicio del experimento, ya que después del drenaje por gravedad, los efectos capilares causarían la retención permanente de parte del agua. El volumen de agua que debe ser añadido para resaturar la arena hasta el nivel h es igual al volumen del espacio poroso por debajo del nivel h , el cual ya no contiene agua. El volumen total del espacio poroso por debajo del

nivel h es $h \cdot A \cdot n$. Cuando la arena fue inicialmente saturada, todo este volumen contenía agua. Cuando la arena fue drenada, una fracción de esta agua, que la designaremos como β , fue desalojada. La fracción remanente, $1 - \beta$, se mantuvo en la arena por retención capilar. Por lo tanto, β representa la *fracción del espacio poroso* vacío cuando se empieza a llenar nuevamente el tanque.

Regrese a la Sección 26 y elija otra respuesta.

18

Su respuesta en la Sección 33 es incorrecta. Como el material del acuífero es idéntico a la arena de nuestro tanque experimental, así como el área de la base de nuestro prisma en el acuífero es igual al área de la base de nuestro tanque, sería de esperar que la relación entre el volumen desalo-

jado del almacenamiento y el descenso del nivel de agua dentro del prisma sea idéntica a la obtenida para el tanque. En la respuesta que usted eligió, no hay ninguna descripción de los efectos por retención capilar. Recuerde que el factor β debe aparecer en su respuesta. Éste fue utilizado en el tanque experimental para describir la fracción del agua que podría ser drenada por gravedad y no la fracción retenida por capilaridad.

Regrese a la Sección 33 y elija otra respuesta.

19

Su respuesta en la Sección 21 es correcta. Los resultados del experimento imaginario indican que el término

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dV}{dh},$$

es una constante para el material del acuífero.

En la práctica, al tratar con el almacenamiento confinado o compresivo de un acuífero, en general se *asume* que la cantidad, $(1/A)(dV/dh)$, es una constante para el acuífero, o es al menos una constante para cualquier posición específica dentro del acuífero. Esta cantidad $(1/A)(dV/dh)$ se denomina S y se define como el coeficiente de almacenamiento confinado o compresivo, o simplemente el coeficiente de almacenamiento del acuífero.

Sería difícil o imposible efectuar el experimento descrito en la Sección 6. Sin embargo, si el coeficiente de almacenamiento se define por la ecuación

$$S = \frac{1}{A} \cdot \frac{dV}{dh},$$

puede desarrollarse de esta definición una teoría de no-equilibrio la cual explica muchos de los fenómenos observados en flujo confinado.

Se deben observar los siguientes puntos en relación al coeficiente de almacenamiento confinado:

- (1) El coeficiente de almacenamiento es el volumen de agua desalojado del almacenamiento en un prisma de área unitaria que se extiende por todo el espesor del acuífero, causado por una unidad de descenso de carga. Esta

expresión puede ser apreciada repitiendo el experimento hipotético descrito anteriormente, o considerando que $A = 1$ en la forma de diferencia finita de la definición, $S = (1/A)(\Delta V/\Delta h)$.

- (2) La definición del coeficiente de almacenamiento es similar a la de rendimiento específico, en el sentido que cada una es definida como el término $(1/A)(dV/dh)$, para un prisma extendido por todo un acuífero. Por eso, en muchas aplicaciones los dos términos ocupan la misma posición en la teoría. En el caso de un acuífero no confinado el rendimiento específico a menudo se refiere como el coeficiente de almacenamiento.
- (3) Se debería notar, sin embargo, que los procesos comprendidos en los dos tipos de almacenamiento son completamente diferentes. Extracción o adición a un depósito no confinado ocurre al nivel del agua; se trata como si ocurriese en un prisma del acuífero porque es generalmente la única forma significativa de almacenamiento dentro de tal prisma en la mayoría de los casos que tratan del nivel superior de las aguas subterráneas. Los efectos de almacenamiento confinado, por otra parte, están distribuidos por todo el espesor vertical de un acuífero.
- (4) Los valores del coeficiente de almacenamiento confinado son generalmente varias órdenes de magnitud menores que los valores del rendimiento específico. Estos últimos valores fluctúan típicamente de 0.001 a 0.35; en cambio, valores de almacenamiento confinado usualmente varían de 10^{-5} a 10^{-3} .

La definición de almacenamiento confinado en términos de un prisma que se extiende por todo

20

el acuífero es apropiada cuando el flujo es enteramente horizontal—es decir, donde no se presentan diferencias en carga o en litología a lo largo de una vertical dentro del acuífero. Donde ocurren diferencias verticales, se debe tomar en cuenta la posibilidad de diferentes formas de descarga del depósito en diferentes puntos a lo largo de la vertical, por lo tanto una definición de almacenamiento basada en un prisma ya no es adecuada. Entonces se utiliza el *almacenamiento específico*, S_s , el cual se define como el volumen de agua desalojado del almacenamiento confinado en una unidad de *volumen* del acuífero por unidad de descenso en carga. En un acuífero homogéneo, S_s , sería igual a S dividido por el espesor del acuífero.

PREGUNTA

Consideremos una pequeña cuenca de agua subterránea que contiene tanto un acuífero artesiano como un acuífero libre. La descarga regional del acuífero artesiano es igual a la del acuífero libre, y las fluctuaciones estacionales de bombeo son similares. Los registros son obtenidos de dos pozos de

observación, ninguno de los cuales se encuentran en las cercanías a pozos de descarga. Un pozo muestra poca fluctuación en el nivel de agua como respuesta a las fluctuaciones estacionales al bombeo, mientras el otro registra fluctuaciones grandes. ¿Cuál de las siguientes consideraciones será probablemente la verdadera?

Pase a la Sección:

- (a) El pozo que muestra pequeñas fluctuaciones perfora el acuífero libre, mientras que el pozo que muestra grandes fluctuaciones perfora la zona artesiana. 25
- (b) Cada pozo penetra ambos acuíferos. 5
- (c) El pozo con fluctuaciones grandes perfora el acuífero libre, mientras que el pozo que muestra pequeñas fluctuaciones perfora la zona artesiana. 15

Con.—20

Su respuesta en la Sección 6 es correcta. El gráfico muestra una línea recta, así que la pendiente dV/dh , es una constante. Ahora supongamos que el área original de la base del prisma se duplica y nuestro experimento imaginario se repite; y supongamos que como resultado del aumento del área de la base, observamos que la pendiente de nuestro gráfico, V , h es dos veces el valor original.

PREGUNTA

Digamos que A representa el área de la base de cualquier prisma (vertical) a través del acuífero. O en términos más generales, digamos que A representa la superficie de la sección del acuífero aislado para la discusión. En base a la evidencia descrita, ¿cuál de los siguientes conceptos podría usted aceptar?

Pase a la Sección:

(a)

$$\frac{dV}{dh}$$

es una constante para el material del acuífero.

3

(b) El término

$$\frac{1}{A} \frac{dV}{dh}$$

es una constante para el material del acuífero.

20

(c) El término

$$A \frac{dv}{dh}$$

es una constante para el material del acuífero.

34

21

Sin respuesta en la Sección 14 es incorrecta. Sin tomar en cuenta efectos de capilaridad, hemos visto que hay una relación lineal entre el volumen de agua, V , bombeado hacia el interior del tanque cuando está inicialmente seco, y el nivel de agua, h , sobre la base del tanque. Esto es, un coeficiente

constante, An , que relaciona ambas cantidades: $V = h \cdot A \cdot n$. Esta linealidad se mantiene en el caso cuando el agua se añade al tanque en incrementos. Cada incremento de volumen de agua, ΔV , bombeado al tanque produce un incremento de carga, Δh , tal que

$$\Delta V = \Delta h \cdot A \cdot n.$$

Regrese a la Sección 14 y elija otra respuesta.

22

Su respuesta en la Sección 6 es incorrecta. La relación de cambio de volumen de agua en el almacenamiento, al cambio en la carga hidráulica es por definición la pendiente $\Delta V/\Delta h$ ó dV/dh , en el gráfico de V versus h . Si la rapidez de cambio de V

con h dependiera de V , el gráfico de V versus h mostraría una pendiente diferente para valores diferentes de V . El gráfico, en otras palabras, sería una especie de curva. Sin embargo, en la Sección 6 se muestra como una línea recta—tiene una pendiente constante, la misma para cualquier valor de V .

Regrese a la Sección 6 y elija otra respuesta.

23

Su respuesta en la Sección 25 es incorrecta. La relación dada en la Sección 25 para la rapidez de drenaje de agua del almacenamiento fue

$$\frac{dV}{dt} = SA \frac{dh}{dt},$$

donde S es el coeficiente de almacenamiento, A el área del acuífero en estudio, y dh/dt la velocidad de cambio de carga con el tiempo dentro de esa

área del acuífero. En la pregunta de la Sección 25, S se dió como 2×10^{-4} para el acuífero artesiano y dh/dt , medido en el pozo profundo fue de 5 pies por día. Una sección del acuífero a 10 pies del radio del pozo de observación tendría una superficie de $\pi \times 10^2$ ó 314 pies cuadrados. La rapidez de drenaje del agua del almacenamiento en esta sección sería por lo tanto

$$\frac{dV}{dt} = SA \frac{dh}{dt} = 2 \times 10^{-4} \times 314 \times 5$$

$$= 0.314 \text{ pies cúbicos por día.}$$

Regrese a la Sección 25 y elija otra respuesta.

24

Su respuesta en la Sección 20 es correcta. Debido al elevado coeficiente de almacenamiento del acuífero libre, desalojo o acumulación de un volumen comparable de agua causaría una menor fluctuación del nivel de agua en el acuífero libre que en el acuífero artesiano. En efecto, hemos introducido variación de tiempo es este problema por-

que discutimos cambios de carga en función de tiempo. Para introducir tiempo en las ecuaciones se procede de la siguiente manera:

Hacemos que S represente el rendimiento específico o el coeficiente de almacenamiento. Entonces de acuerdo a nuestra definición podemos escribir, en forma de diferencia finita,

$$S = \frac{1}{A} \frac{\Delta V}{\Delta h}.$$

25

La relación entre el volumen de agua introducido o desalojado del almacenamiento del acuífero en un prisma de área de base A y el consecuente cambio de carga es por lo tanto $\Delta V = SA \Delta h$.

Ahora dividamos ambos términos de la ecuación por Δt , que es el intervalo de tiempo sobre el cual la disminución de carga fue observada. Entonces tenemos

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = SA \frac{\Delta h}{\Delta t},$$

o, si Δt es un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño,

$$\frac{dV}{dt} = SA \frac{dh}{dt}.$$

Aquí, dV/dt es la rapidez de acumulación de agua en el depósito, expresada, por ejemplo en pies cúbicos por día; y dh/dt es la rapidez de aumento de carga, expresada, por ejemplo en pies por día. Si consideramos el desalojo del almacenamiento, la carga disminuirá y tanto dV/dt como dh/dt serán negativos. La notación de la derivada parcial, $\partial h / \partial t$, se usa comúnmente como reemplazo de dh/dt debido a que la carga puede variar con la distancia en el acuífero y también con el tiempo. Esta ecuación es frecuentemente referida como la ecuación de almacenamiento.

La ecuación también puede ser obtenida utilizando las reglas de diferenciación. Para el caso que consideramos tenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt},$$

pero por definición del coeficiente de almacenamiento, $dV/dh = SA$, así que por sustitución

$$\frac{dV}{dt} = SA \frac{dh}{dt}.$$

PREGUNTA

Supongamos que marcamos los niveles de agua en un pozo profundo de observación que penetra un acuífero confinado con un coeficiente de almacenamiento de 2×10^{-4} y un pozo de observación poco profundo que penetra al acuífero libre con un rendimiento específico de 0.20. El nivel de agua en el pozo profundo desciende a una razón de 5 pies por día, mientras que el pozo poco profundo desciende a una razón de 0.5 pies por día. Tomando en cuenta el desalojo del agua del almacenamiento en cada acuífero a un radio de 10 pies del pozo de observación, ¿cuál de las siguientes expresiones será más exacta?

Pase a la Sección:

- (a) Dentro del radio de 10 pies del pozo poco profundo, el agua es desalojada del almacenamiento del acuífero libre a una razón de 5 pies cúbicos por día. 8
- (b) La rapidez de drenaje del agua del almacenamiento en el acuífero, libre a 10 pies del pozo poco profundo es 100 veces más grande que en el acuífero artesiano, a 10 pies del pozo profundo. 13
- (c) Dentro de un radio de 10 pies del pozo profundo, el agua es desalojada del almacenamiento en el acuífero artesiano a una razón de 1 pie cúbico por día. 24

Con.—25

Su respuesta en la Sección 14 es correcta. Si no existiesen efectos capilares, el resultado de llenar el tanque con arena sería simplemente disminuir el volumen disponible para el almacenamiento de agua. Por lo tanto, la pendiente del gráfico de V versus h para un tanque lleno de arena se diferenciaría de la pendiente para un tanque abierto (Sección 1) sólo por el factor n , que es la relación del volumen de almacenamiento disponible en el tanque con arena al volumen en el tanque abierto.

En la práctica, por supuesto, efectos capilares no se pueden ignorar. En este proceso tomaremos un enfoque simplificado de sus efectos ya que una investigación detallada del fenómeno de capilaridad está fuera de los objetivos de esta presentación. Asumiremos que debido a las fuerzas de capilaridad, una cierta fracción constante de agua

contenida en la arena es permanentemente retenida. Es decir, asumimos que después de la saturación inicial de la arena, no podemos jamás drenar por gravedad el volumen total de agua que se añadió durante la saturación inicial. Una parte de esta agua añadida al principio permanece definitivamente en los espacios porosos por atracción capilar; por lo tanto, la cantidad de agua que puede ser alternadamente almacenada y recuperada es reducida.

PREGUNTA

Supongamos que el tanque es saturado inicialmente al nivel h y luego es drenado por gravedad. Más aún, supongamos que la relación del volumen

de agua drenada al volumen inicialmente añadido se da por β ; es decir, la fracción *del agua añadida* que puede ser drenada es β , mientras que la fracción retenida en la arena por las fuerzas capilares es $(1 - \beta)$. En base a nuestra suposición que la fracción retenida es una constante, ¿cuál de las siguientes expresiones da el volumen de agua que tendría que ser añadido después del drenaje para resaturar la arena al mismo nivel h de antes?

Pase a la Sección:

$$V = hAn \quad 18$$

$$V = hA \frac{n}{\beta} \quad 2$$

$$V = hAn\beta \quad 16$$

26—Con.

Su respuesta en la Sección 32 es incorrecta. Su respuesta define el rendimiento específico como la cantidad (probablemente la cantidad total) de agua que puede ser drenada por gravedad de una unidad de área del acuífero. En el análisis anterior, desarrollamos el concepto de rendimiento

específico en términos de cantidad de agua que puede ser drenada *por unidad de descenso de nivel de agua*. Una definición verbal del rendimiento específico debe por lo tanto incluir el último concepto en la misma forma—es decir, debe indicar que nos estamos refiriendo a la cantidad desalojada del almacenamiento por unidad de descenso de carga.

Regrese a la Sección 32 y elija otra respuesta.

27

Su respuesta en la Sección 33 es incorrecta. El material del acuífero se considera idéntico a la arena del tanque experimental descrito previamente, y el área de la base del prisma igual al área de la base del tanque. Estamos considerando únicamente el almacenamiento dentro del mismo

prisma, en relación al nivel del agua en el prisma y no nos interesa que ocurre en el acuífero fuera de los límites del prisma. En esta forma, deberíamos esperar que la relación entre el volumen de agua drenada del almacenamiento y el consecuente descenso del nivel de agua sea igual para el prisma del acuífero como para el tanque del experimento anterior.

Regrese a la Sección 33 y elija otra respuesta.

28

Su respuesta en la Sección 16,

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{dV}{dh} = hAn\beta,$$

es incorrecta. Esta respuesta indicaría que la relación entre V y h —es decir, la pendiente de un gráfico de V versus h —está en función de h . Sin embargo, hemos visto que si rellenamos el tanque después de haber sido drenado por gravedad, encontraremos que V y h se relacionan por una constante, $An\beta$. Es decir, observamos que $V =$

$hAn\beta$ o que la relación de V con h es la constante $An\beta$. Si el tanque es drenado en intervalos, o rellenado en la misma forma después de drenado, esperaríamos la misma relación entre el incremento del volumen del fluido, ΔV , y el incremento de la carga, Δh , tal como se observó entre V y h en el problema inicial. Esto es, esperamos encontrar que $\Delta V = \Delta h \cdot An\beta$.

Regrese a la Sección 16 y elija otra respuesta.

29

Su respuesta en la Sección 6 es incorrecta. Δh representa un simple cambio en la carga hidráulica, h . No representa ningún tipo de rapidez de cambio; cuando describimos una relación de cambio, requerimos siempre dos variables debido a que siempre se considera la rapidez de cambio de una variable en función de la otra. En esta etapa de nuestra discusión, estamos considerando la rela-

ción entre el volumen de agua en almacenamiento y la carga hidráulica. Aún no hemos considerado el efecto de la variación del área de la base del prisma del acuífero.

Regrese a la Sección 6 y elija otra respuesta.

30

Su respuesta en la Sección 11 es incorrecta. El tanque lleno de arena en la Sección 11 difiere del tanque abierto en la Sección 1, en que cualquier volumen de agua bombeado al tanque lleno de arena puede ocupar únicamente el volumen de los poros interconectados como espacio de almacenamiento; en el tanque abierto de la Sección 1, la capacidad total del tanque estaba disponible. Si el tanque con arena se encuentra inicialmente vacío y un volumen de agua, V , se bombea en él, esta agua ocupará el volumen total del espacio interconectado entre la base del tanque y la altura hasta la cual la arena está saturada (sin tomar en cuenta efectos de capilaridad). Si el nivel de agua en la

arena está a una altura h sobre la base del tanque, el volumen total de la parte saturada de la arena será $h \cdot A$, donde A es el área de la base del tanque. Sin embargo, el volumen de agua inyectada no será igual a este volumen total saturado, sino el volumen de los poros interconectados dentro de la región saturada. Un repaso de la definición de porosidad que se explica en la Parte I podría ser útil para aclarar este concepto.

Regrese a la Sección 11 y elija otra respuesta.

31

Su respuesta en la Sección 33,

$$\frac{dV}{dh} = An\beta,$$

es correcta. Se supone que el material de acuífero es idéntico a la arena de los experimentos. Si el área del prisma es igual al área del tanque, los dos gráficos de almacenamiento versus el nivel de agua

deberían ser idénticos. Sin embargo, observe que el área es un factor en la expresión dV/dh ; si hubiésemos escogido una sección del prisma de área más grande, se dispondría de mayor almacenamiento, por cada pie de cambio de carga, que un área más pequeña, en la misma forma como un tanque de base más grande dispone de mayor

32

almacenamiento por cada pie en el cambio de nivel de agua que un tanque con área más pequeña. Si el área de la base del prisma fuera unitaria, la expresión dV/dh sería simplemente $n\beta$; y en general, una expresión puede ser escrita para el cambio en el volumen de almacenamiento por cambio en unidad de carga, *por unidad de área del acuífero*, como

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dV}{dh} = n\beta.$$

El término $n\beta$, es referido como el rendimiento específico de un acuífero, y es generalmente designado como S_y . Como asumimos que la fracción de agua retenida por las fuerzas capilares $(1 - \beta)$, es constante, deducimos que S_y es también una constante y para muchas aplicaciones en ingeniería este es un procedimiento satisfactorio. Se debe observar, sin embargo, que se trata de una aproximación; la fracción del agua retenida por capilaridad puede cambiar con el tiempo, debido a varias razones, produciendo una variación aparente de S_y con tiempo.

El rendimiento específico de un acuífero describe las propiedades de almacenar y desalojar el

agua (en un acuífero no confinado) así como la permeabilidad describe las propiedades de transmisión de agua. Matemáticamente, el rendimiento específico es equivalente al término $(1/A)(dV/dh)$, para un acuífero no confinado.

PREGUNTA

En base a la discusión anterior, ¿cuál de los siguientes conceptos elegiría como la mejor definición verbal del rendimiento específico?

Pase a la Sección:

- | | |
|--|----|
| (a) El rendimiento específico de un acuífero no confinado es el volumen de agua que puede ser drenado del acuífero por gravedad como reacción al descenso unitario en la carga. | 7 |
| (b) El rendimiento específico de un acuífero no confinado horizontal es el volumen de agua, drenado por gravedad de un prisma vertical de base unitaria, extendiéndose a través del acuífero, como reacción a una unidad de descenso del nivel saturado. | 6 |
| (c) El rendimiento específico de un acuífero no confinado es la cantidad de agua que puede ser drenada de un área unitaria del acuífero. | 27 |

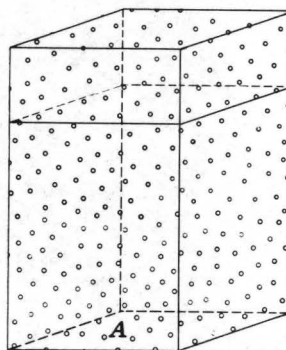
32—Con.

Su respuesta en la Sección 16,

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{dV}{dh} = An\beta,$$

es correcta. La pendiente del gráfico de volumen de agua en almacenamiento versus nivel de agua—o en otras palabras, la derivada de V con respecto a h —sería constante e igual a $An\beta$.

Ahora supongamos que estamos tratando con una sección prismática vertical en un acuífero no confinado como se muestra en la figura. El área de la base del prisma se denomina como A . Supongamos que el material del acuífero es idéntico en sus propiedades hidráulicas a la arena de los experimentos. Deseamos construir un gráfico del agua en almacenamiento recuperable dentro del prisma



versus el nivel de saturación, o el nivel superior del agua subterránea, en el acuífero próximo al prisma. Estamos interesados únicamente en el agua que puede ser drenada por gravedad; el agua retenida permanentemente por capilaridad no será considerada parte del almacenamiento.

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones podría describir la pendiente de este grafico?

$$\frac{dV}{dh} = An \quad 19$$

Pase a la Sección:

$$\frac{dV}{dh} = An\beta \quad 32$$

$$\frac{dV}{dh} = Ahnb \quad 28$$

Con.—33

Su respuesta en la Sección 21 es incorrecta. En el experimento imaginario descrito en la Sección 21, se expresó que el duplicar el área de base A , del prisma tenía el efecto de duplicar la pendiente dV/dh , del gráfico V, h . Por lo tanto, el término $A(dV/dh)$ sería cuatro veces más grande para el prisma de área doble que para el prisma original. Es decir, el término $A(dV/dh)$ dependería del

tamaño del prisma considerado, como también del tipo de material del acuífero, y no podría ser considerado una constante representativa del material del acuífero.

Regrese a la Sección 21 y elija otra respuesta.

34

Parte V. Flujo Unidireccional de No-equilibrio

Introducción

En la Parte V, nuestro propósito es desarrollar la ecuación diferencial para un problema de flujo de no-equilibrio. Por consiguiente, utilizamos la ecuación de almacenamiento

$$\frac{dV}{dt} = SA \frac{dh}{dt},$$

desarrollada en la Parte IV, también utilizamos la Ley de Darcy. Estas dos expresiones están relacionadas por una expresión que se llama la ecuación de continuidad, la cual es la definición del principio de conservación de masa.

En la Parte VI desarrollaremos el mismo tipo de ecuación con coordenadas polares y se discutirá una solución a esta ecuación para un problema particular de flujo. Al estudiar las Partes V y VI, el lector observará que las relaciones que describen el almacenamiento y transmisión del agua subterránea pueden ser

combinadas para desarrollar ecuaciones diferenciales para varios tipos de flujo; y que las soluciones a estas ecuaciones pueden ser aplicadas a una variedad de problemas de campo.

Antes de empezar con el programa de la Parte V, presentamos consideraciones en forma de texto, sobre el significado de las derivadas parciales, su uso en las ecuaciones para aguas subterráneas, y en particular su uso en una forma más general de la Ley de Darcy. Esta forma de la Ley de Darcy se introdujo en las consideraciones expuestas en forma de texto al final de la Parte II. A continuación se exponen conceptos dirigidos a los lectores que no están familiarizados con derivadas parciales y notación vectorial. Estos conceptos pueden ser omitidos por aquellos que no son neófitos en este tema. La exposición no intenta mostrar un análisis riguroso de esta materia por lo tanto se recomienda, si es necesario, consultar con textos básicos de cálculo.

Las Derivadas Parciales en el Análisis de Flujo de Agua Subterráneas

Cuando una variable dependiente varía en relación a más de una variable independiente, se utiliza la notación de derivada parcial. Un mapa topográfico, por ejemplo, puede ser considerado como una representación de una variable dependiente (elevación) la cual está en función de dos variables independientes—las dos direcciones del mapa, que podemos denominarlas como x e y , como se muestra en la figura *i*. Si la elevación es E , cada curva del mapa representa una curva en el plano x - y a lo largo de la cual E tiene un valor constante. En general, si nos desplazamos en la dirección x , cruzaremos curvas de elevación—es decir, E cambiará al desplazar una distancia Δx paralela al eje de las x ; se observa que E cambiará por una magnitud ΔE_x . Podríamos expresar la relación $\Delta E_x / \Delta x$, que

representa el cambio en elevación sobre el correspondiente cambio en el intervalo x . Si el intervalo Δx llega a ser infinitésimo, esta relación se designa como $\partial E / \partial x$ y se expresa como la derivada parcial de E con respecto a x . $\partial E / \partial x$ es en realidad la pendiente de un gráfico de E versus x para el punto en consideración, o la pendiente de una tangente de este gráfico, como se muestra en la figura *i*. Observe que para obtener $\partial E / \partial x$ nos desplazamos paralelamente al eje de las x —es decir, manteniendo y constante, considerando únicamente la variación de E debido al cambio en x .

Similarmente, si nos desplazamos una pequeña distancia, Δy paralela al eje y , E tendrá un pequeño cambio, ΔE_y . Nuevamente podemos expresar la relación $\Delta E_y / \Delta y$; si la distancia sobre

el eje y es infinitésima, la relación se designa como $\partial E/\partial y$ y se denomina como la derivada parcial de E con respecto a y . Observe que nos desplazamos a lo largo del eje y por lo tanto tendremos a x constante y atribuiremos la variación de E debido únicamente al cambio de y .

Si sucede que la superficie varía regularmente sobre el área en el mapa, podremos escribir una expresión matemática que da la elevación E , como una función de x e y , entonces podremos computar $\partial E/\partial x$ como una simple diferenciación de esta expresión con respecto a x considerando y como constante. Similarmente, podemos computar $\partial E/\partial y$ por diferenciación de la expresión con respecto a y , cuando x es constante. Por ejemplo, suponiendo que después de analizar el mapa topográfico, decidimos que la elevación puede ser expresada aproximadamente como una función de x e y por la ecuación

$$E = 5x^2 + 10y + 20.$$

Diferenciando esta ecuación con respecto a x , para y constante, se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 10x.$$

Por lo tanto, podríamos computar $\partial E/\partial x$ para cualquier punto por sustitución de la coordenada x de ese punto en la ecuación mencionada. Diferenciando la ecuación con respecto a y , cuando x es constante, se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 10,$$

indicaque que $\partial E/\partial y$ tiene el mismo valor, 10, para todos los puntos del mapa. En este ejemplo, $\partial E/\partial x$ resultó a ser independiente de y y $\partial E/\partial y$ independiente tanto de x como de y . En general, $\partial E/\partial x$ puede depender de ambos, x e y , así como $\partial E/\partial y$ puede depender de x e y . Por ejemplo, si E se describe por la ecuación

$$E = 5x^2 + 5y^2 + 8xy + 20,$$

la diferenciación con respecto a x daría

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 10x + 8y,$$

mientras que la diferenciación con respecto a y sería

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 10y + 8x.$$

En el ejemplo del mapa topográfico, $\partial E/\partial x$ y $\partial E/\partial y$ son derivadas espaciales—es decir, cada una describe las variaciones de E en una dirección particular en el espacio. En las consideraciones expuestas en este capítulo usaremos las derivadas espaciales de carga, $\partial h/\partial x$, que dan el cambio en carga hidráulica con respecto a la distancia en la dirección x . Además, utilizaremos la derivada de carga con respecto al tiempo, $\partial h/\partial t$, si se mantiene la posición fija. $\partial h/\partial t$ es una derivada parcial, así como lo es $\partial h/\partial x$, y se obtiene de acuerdo a las mismas reglas considerando todas las variables independientes constantes, excepto t . Podríamos en efecto, hacer un “plano” de la variación de carga con respecto a la distancia y el tiempo al establecer coordenadas como x y t , y dibujar curvas de igual h en este plano x, t . Las consideraciones expuestas para las derivadas direccionales en el ejemplo del mapa topográfico pueden ser aplicadas a $\partial h/\partial t$ en este ejemplo.

La derivada parcial de carga con respecto a la distancia, $\partial h/\partial x$, da la pendiente de la superficie potenciométrica en la dirección x para un punto dado, x y tiempo t . Esto se ilustra en la figura *ii*. Si x ó t varían, en general $\partial h/\partial x$ variará debido a que la pendiente de la superficie potenciométrica cambia en función de posición y tiempo.

La derivada parcial de carga con respecto a tiempo, $\partial h/\partial t$, da la rapidez con que el nivel de agua asciende o desciende—es decir, la pendiente de un hidrógrama—sobre un punto dado, x , y tiempo, t , como se muestra en la figura *iii*. Nuevamente, si x ó t varían, entonces en general $\partial h/\partial t$ variará. En otras palabras, $\partial h/\partial x$ está en función tanto de x como de t , y $\partial h/\partial t$ es también función de x y t , en el caso general.

Físicamente, $\partial h/\partial x$ puede ser considerada como la pendiente de la superficie potenciométrica que se observaría si el tiempo fuese detenido en algún valor. Si se da una expresión para h como una función de x y t , $\partial h/\partial x$ puede ser calculada por diferenciación de esta expresión con respecto a x considerando t como una constante. En la misma forma, $\partial h/\partial t$ puede visualizarse como la pendiente de un hidrógrama registrado en una posición par-

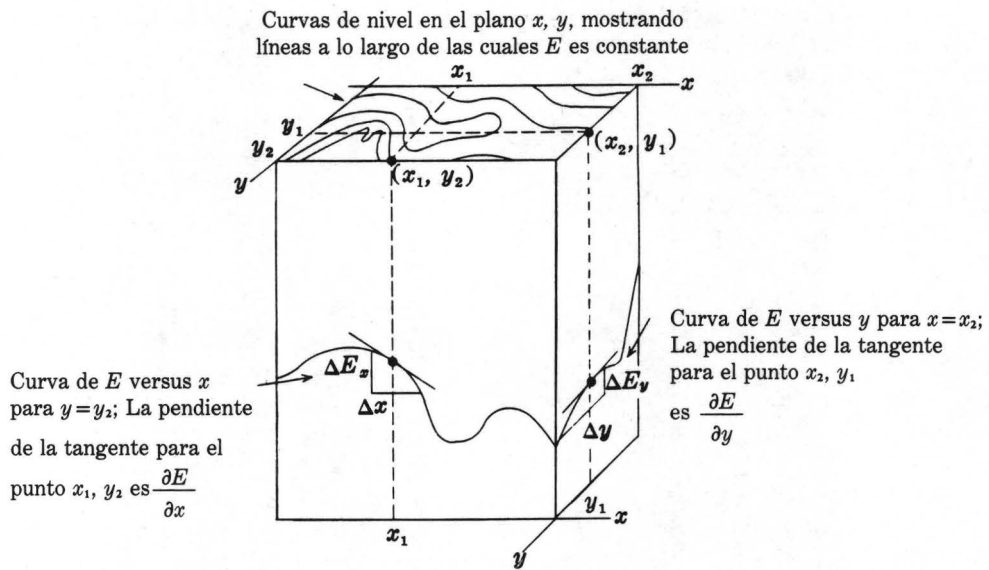


fig. i

ticular (valor x). Si h se presenta como una función de x y t , se podría obtener una expresión para $\partial h / \partial t$ por diferenciación con respecto a t , considerando x como una constante.

En la Parte V las consideraciones del problema se restringen únicamente a la derivada espacial $\partial h / \partial x$, y la derivada del tiempo. En el caso general, tendremos que considerar derivadas tridimensionales— $\partial h / \partial x$, $\partial h / \partial y$, y $\partial h / \partial z$ —además de la derivada de tiempo. En tal

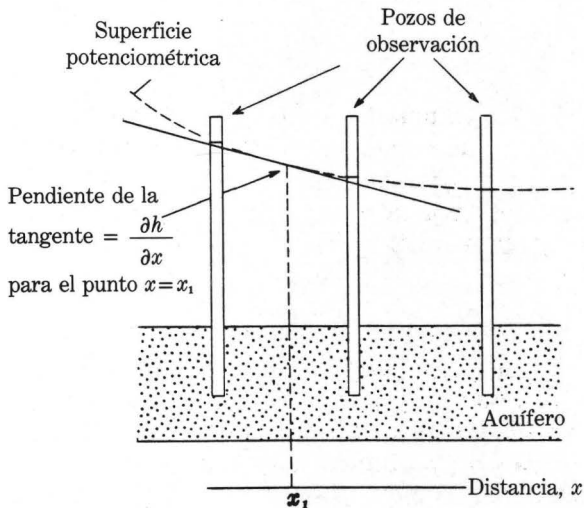


fig. ii

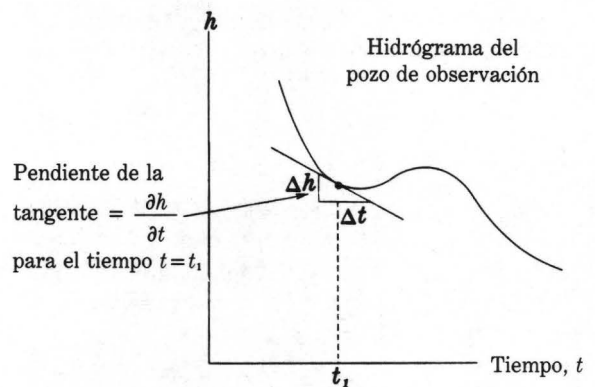


fig. iii

caso, como se indicó al final de la Parte II, utilizaríamos la Ley de Darcy en una forma más general. Cuando ocurre flujo en más de una dirección, consideramos el caudal específico $q=Q/A$ como un vector teniendo los tres componentes q_x , q_y , y q_z . Si el medio es isotrópico, cada uno de estos componentes se obtiene por una forma de la Ley de Darcy, en la cual se emplea la derivada parcial de carga en la direc-

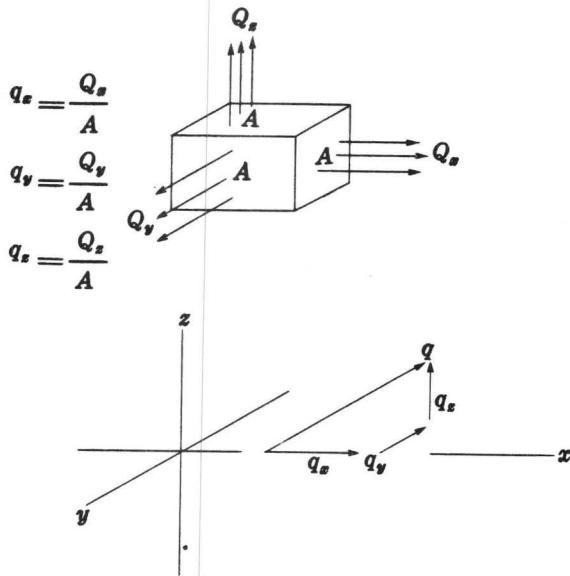


fig. iv

ción de interés. Las expresiones para los componentes de las velocidades aparentes son:

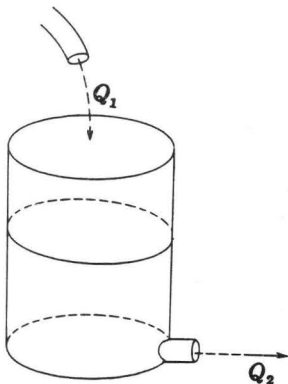
$$\begin{aligned} q_x &= -K \frac{\partial h}{\partial x} \\ q_y &= -K \frac{\partial h}{\partial y} \\ q_z &= -K \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}$$

donde K es la conductividad hidráulica.

q_x representa en realidad la descarga del fluido por unidad de área en la dirección x —es decir, la descarga que atraviesa un área unitaria orientada en ángulo recto al eje de las x . Similarmente, q_y y q_z representan la descarga que atraviesa áreas unitarias normales a los ejes y y z , respectivamente. Los tres componentes son calculados independientemente y sumados vectorialmente para obtener la resultante de la velocidad aparente del flujo. (Ver figura iv)

Ahora continuaremos con el material programado correspondiente a la Parte V.

1"



La figura muestra un tanque abierto con entrada en la parte superior y una salida en la base. El agua entra al tanque por la parte superior a una razón Q_1 y se descarga por la base a una proporción Q_2 .

PREGUNTA

Supongamos que el volumen de agua en el tanque aumenta a una velocidad de 5 pies cúbicos por minuto. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones podría ser considerada correcta?

Pase a la Sección

| | |
|---|----|
| $Q_1 = 5$ pies cúbicos por minuto | 29 |
| $\frac{Q_1 + Q_2}{2} = 2.5$ pies cúbicos por minuto | 17 |
| $Q_1 - Q_2 = 5$ pies cúbicos por minuto | 21 |

2''

Su respuesta en la Sección 32,

$$Q_1 - Q_2 = K \frac{\partial h}{\partial x},$$

es incorrecta. El flujo a través de la cara 1 del prisma se obtiene, de acuerdo a la Ley de Darcy, como el producto de la conductividad hidráulica, la gradiente de carga en la cara 1, y la sección transversal $b\Delta y$, de la misma cara; es decir,

$$Q_1 = -K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 b\Delta y.$$

Igualmente, la salida a través de la cara 2 se obtiene por el producto de la conductividad hidráulica, la gradiente de carga en la cara 2 y la

sección transversal de la cara 2, la cual se obtiene da por $b\Delta y$; es decir,

$$Q_2 = -K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 b\Delta y.$$

El flujo de entrada menos el de salida se obtiene entonces por

$$Q_1 - Q_2 = Kb\Delta y \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 \right\}.$$

En las secciones precedentes, hemos visto que el término

$$\left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 \right\}$$

puede escribirse en una forma equivalente utilizando la segunda derivada.

Regrese a la Sección 32 y utilice esta segunda derivada en la ecuación anterior para obtener la respuesta correcta.

3''

Su respuesta en la Sección 30,

$$Q_1 = \frac{-K}{b\Delta y} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1,$$

es incorrecta. La Ley de Darcy expresa que el flujo a través de un plano particular-en este caso, para la cara 1 del prisma-se obtiene por el producto de la conductividad hidráulica, área y gradiente de carga. Su respuesta presenta el flujo como producto de la conductividad hidráulica y la gradiente de carga dividido por el área.

Regrese a la Sección 30 y elija otra respuesta.

4''

Su respuesta en la Sección 7,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x},$$

es incorrecta. Deseamos conocer el cambio en la cantidad $\partial h/\partial x$ en un intervalo pequeño, Δx ,

sobre el eje de las x . Hemos visto en las secciones anteriores de la Parte V que el cambio en la variable para un intervalo es el producto de la derivada de la variable por la longitud del intervalo. En este caso, la variable es $\partial h/\partial x$ y el intervalo es Δx ; por lo tanto requerimos la derivada de $\partial h/\partial x$ con respecto a x multiplicada por el intervalo Δx .

Regrese a la Sección 7 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 21 es incorrecta. Un descenso del nivel de agua en el piezómetro indicaría que el agua fue desalojada del almacenamiento en el prisma del acuífero. La pendiente del gráfico del nivel piezométrico versus tiempo sería en este caso negativa; es decir, $\partial h/\partial t$ sería negativa, debido a que h disminuye cuando el tiempo aumenta. De acuerdo a la ecuación de almacenamiento

$$\frac{dV}{dt} = SA \frac{\partial h}{\partial t},$$

por eso la proporción de acumulación en el almacenamiento dV/dt , debería ser también

negativa. Es decir, tendríamos disminución en vez de acumulación en el almacenamiento. La pregunta en la Sección 22, sin embargo, expresa que el flujo de entrada en el prisma excede al de salida; además, de acuerdo a la ecuación de continuidad, debería ocurrir la acumulación en el almacenamiento.

Regrese a la Sección 21 y elija otra respuesta.

5''

Su respuesta en la Sección 21 es incorrecta. Si el nivel de agua en el piezómetro fuera constante con el tiempo, un gráfico de los valores piezométricos tomados versus tiempo sería simplemente una línea horizontal. La pendiente de tal gráfico, $\partial h/\partial t$, sería cero. Según la ecuación de almacenamiento, la rapidez de acumulación de agua en el prisma tendría que ser cero puesto que

$$\frac{dV}{dt} = SA \frac{\partial h}{\partial t} = SA \cdot 0 = 0.$$

La pregunta expresa, sin embargo, que el flujo de entrada al prisma excede al flujo de salida; de acuerdo a la ecuación de continuidad, entonces, la proporción de acumulación de agua en el almacenamiento no puede ser cero. En cambio, debe ser igual a la diferencia entre la entrada y la salida.

Regrese a la Sección 21 y elija otra respuesta.

6''

Su respuesta en la Sección 16,

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_2 - \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = \left(\frac{d \left(\frac{dy}{dx} \right)}{dx} \right)_{1-2} (x_2 - x_1),$$

es correcta. En este caso la derivada misma es la variable cuyo cambio se requiere, y por lo tanto deberíamos utilizar la derivada de la derivada,

$$\frac{d \left(\frac{dy}{dx} \right)}{dx},$$

evaluada en un punto dentro del intervalo. Este término es llamado la segunda derivada de y con

respecto a x , cuya notación es d^2y/dx^2 . Es decir,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \left(\frac{dy}{dx} \right)}{dx}$$

= pendiente del gráfico de $\frac{dy}{dx}$ versus x .

Los términos y notaciones utilizados en el caso de derivadas parciales son enteramente paralelos. La notación, $\partial^2 h/\partial x^2$, se utiliza para representar la segunda derivada *parcial* de h

7''

7"—Con.

con respecto a x , la cual resulta ser la derivada parcial de $\partial h/\partial x$ con respecto a x . Es decir,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\partial x}$$

=pendiente del gráfico de $\frac{\partial h}{\partial x}$ versus x .

Nuevamente, la notación de la derivada parcial indica que podremos esperar que $\partial h/\partial x$ varíe con t (o con alguna otra variable) tanto como con x ; $\partial^2 h/\partial x^2$ mide únicamente su cambio debido al cambio en x , las demás variables independientes se mantienen constantes.

PREGUNTA

En la Sección 9, vimos que el flujo de entrada menos el de salida para el prisma del acuífero se puede expresar en la forma

$$Q_1 - Q_2 = Kb\Delta y \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 \right\}$$

y que el término

$$\left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 \right\}$$

representa el cambio en la gradiente hidráulica presente en el prisma. Si el ancho del prisma en la dirección x (es decir paralela al eje x) es Δx , ¿cuál de las siguientes expresiones puede, en forma razonable, ser substituida por

$$\left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 \right\}?$$

Pase a la Sección

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad 4$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\partial x} \quad 23$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cdot \Delta x \quad 32$$

8"

Su respuesta en la Sección 30,

$$Q_1 = -Kb\Delta x\Delta y \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1,$$

es incorrecta. De acuerdo a la Ley de Darcy, el flujo a través de la cara 1 debe igualar al producto de la conductividad hidráulica, el área de la sección de la cara 1 y la gradiente de carga en la cara 1. El área de la sección de la cara 1 es simplemente $b\Delta y$.

Regrese a la Sección 30 y elija otra respuesta.

9"

Su respuesta en la Sección 33,

$$Q_1 - Q_2 = -Kb\Delta y \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 \right\},$$

es correcta. Podríamos cambiar los términos entre llaves a $(\partial h/\partial x)_2 - (\partial h/\partial x)_1$, y omitir el signo negativo para obtener la forma

$$Q_1 - Q_2 = Kb\Delta y \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 \right\}.$$

El término $(\partial h/\partial x)_2 - (\partial h/\partial x)_1$, representa el cambio en la gradiente hidráulica de la cara 1 a

la 2 en el prisma del acuífero. Deseamos ahora expresar este cambio en gradiente hidráulico en una forma ligeramente diferente.

PREGUNTA

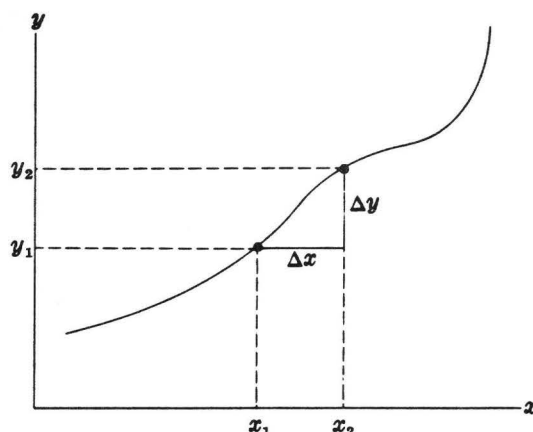
En la figura una variable y se construye en función a una variable independiente, x . A medida que x varía de x_1 a x_2 , y varía de y_1 a y_2 ; $(dy/dx)_{1-2}$ representa la pendiente del gráfico en un punto entre x_1 and x_2 . Si el cambio en x es pequeño, ¿cuál de las siguientes expresiones usaría para obtener un valor aproximado para el cambio en y ?

Pase a la Sección

$$y_2 - y_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{1-2} (x_2 - x_1) \quad 16$$

$$y_2 - y_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{1-2} + (x_2 - x_1) \quad 25$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) + \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad 20$$



Con.—9"

Su respuesta en la Sección 34,

10"

$$\frac{dV}{dt} = S \Delta x \Delta y \frac{\partial h}{\partial t},$$

es correcta. (Deberíamos observar que para un prisma finito, $\partial h / \partial t$ puede variar de un punto a otro entre las dos caras; y que requerimos un valor promedio, el cual proporcionará el valor correcto de dV/dt para el prisma. En efecto, hay siempre al menos un punto dentro del prisma en el cual el valor de $\partial h / \partial t$ es el promedio, entonces asumimos que podemos medir y usar $\partial h / \partial t$ en tal punto. Si permitimos que el prisma sea infinitesimal en tamaño, solamente un valor de $\partial h / \partial t$ puede ser especificado dentro de él, y este valor dará un resultado exacto para dV/dt .)

Utilizando la ecuación de continuidad establecemos esta expresión obtenida para la rapidez de acumulación como igual a la expresión del flujo de entrada menos el de salida.

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones se obtiene al igualar la expresión mencionada anteriormente para dV/dt a la ecuación obtenida en la Sección 34 para $Q_1 - Q_2$?

Pase a la Sección

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad 19$$

$$T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Delta x \Delta y = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad 11$$

$$T \Delta y \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} = S \Delta x \Delta y \frac{\partial h}{\partial t} \quad 24$$

11''

Su respuesta en la Sección 10 es incorrecta. Utilizamos la Ley de Darcy a fin de obtener expresiones para la entrada y salida de flujo del prisma del acuífero, y usamos la notación de la segunda derivada para expresar la diferencia entre entrada y salida de flujo. La ecuación así obtenida en la sección 34

$$Q_1 - Q_2 = T \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 h}{\partial x^2},$$

fue para el flujo de entrada menos el de salida. De acuerdo a la ecuación de continuidad, entrada menos salida de flujo debe ser igual a la proporción de acumulación en el almacenamiento; es decir

$$Q_1 - Q_2 = \frac{dV}{dt}.$$

Obtuvimos una expresión para dV/dt por medio de la ecuación de almacenamiento, que expresa que el volumen de acumulación en el almacenamiento debe ser igual al producto del coeficiente de almacenamiento, del área base o superficie y la velocidad de cambio de carga, es decir

$$\frac{dV}{dt} = S \Delta x \Delta y \frac{\partial h}{\partial t}.$$

La sustitución de la primera y tercera ecuación en la segunda produce el resultado correcto.

Regrese a la Sección 10 y elija otra respuesta.

12''

Su respuesta en la Sección 34,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{S}{K} \frac{\partial h}{\partial t},$$

es incorrecta. La ecuación de almacenamiento nos dice que el volumen de acumulación de agua

en almacenamiento dentro del prisma del acuífero debe igualar al producto del coeficiente de almacenamiento, con la proporción de cambio de carga con tiempo, y el área base del prisma. La conductividad hidráulica, K , no se considera en la ecuación de almacenamiento. En la respuesta elegida por usted, no existe un término que describe el área base del prisma y en cambio la conductividad hidráulica aparece en el lado derecho de la ecuación.

Regrese a la Sección 34 y elija otra respuesta.

13''

Su respuesta en la Sección 16,

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_2 - \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{1-2}^2 (x_2 - x_1),$$

es incorrecta. En este caso, la variable dependiente dibujada en el eje vertical, es dy/dx . Como

hemos visto en las secciones anteriores, el cambio en la variable dependiente se obtiene por la pendiente del gráfico, o la derivada de la variable dependiente con respecto a x , multiplicada por el cambio en x . Por lo tanto, necesitamos la derivada de dy/dx con respecto a x en nuestra respuesta. En la respuesta que se muestra arriba tenemos solamente el cuadrado de la derivada de y con respecto a x .

Regrese a la Sección 16 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 22 es incorrecta. Es verdad que si el flujo de entrada difiere del de salida, el nivel del agua en el prisma del acuífero deberá cambiar también con el tiempo aunque no necesariamente ascenderá: Si el flujo de entrada es menor que el de salida, el nivel

descenderá.

Regrese a la Sección 22 y elija otra respuesta.

14''

Su respuesta en la Sección 33,

$$Q_1 - Q_2 = - \frac{S}{K} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2,$$

es incorrecta. En esta respuesta se asocia el coeficiente de almacenamiento S , con la derivada espacial de carga, $(\partial h / \partial x)_2$; esto por sí solo debería ser suficiente para indicar que la respuesta es incorrecta. En la ecuación de almacenamiento, S está asociada con la derivada de carga respecto a tiempo, $\partial h / \partial t$. Nuevamente,

la respuesta escogida incluye únicamente la gradiente de carga en el área de salida. Debido a que buscamos una expresión para la entrada *menos* la salida, necesitamos que las gradientes de carga en ambas caras del prisma sean comprendidas en la respuesta.

Regrese a la Sección 33 y elija otra respuesta.

15''

Su respuesta en la Sección 9,

$$y_2 - y_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{1-2} (x_2 - x_1),$$

es correcta. El cambio en la variable dependiente, y , se obtiene multiplicando el cambio en la variable independiente, x , por la pendiente del

gráfico, dy/dx . Observe que dy/dx debe ser la pendiente cerca del intervalo x_1 a x_2 ; frecuentemente se considera como la pendiente del punto medio de este intervalo. Su aproximación llega a ser más precisa cuando el tamaño del intervalo $x_2 - x_1$, disminuye. La ecuación anterior a menudo se escribe en la forma

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x.$$

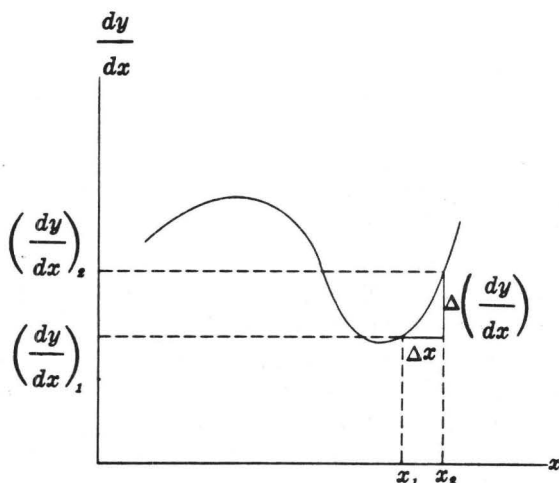
(De una manera formal, se puede demostrar que si y es una función continua de x y si dy/dx existe en el intervalo x_1 a x_2 , entonces existe al menos un punto en alguna parte de este intervalo en el cual la derivada, dy/dx , tiene un valor tal que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ó

$$y_2 - y_1 = \frac{dy}{dx} (x_2 - x_1).$$

16''



16" — Con.

Esto es conocido como la ley de la media, en cálculo diferencial. Garantiza que la aproximación puede siempre utilizarse, siempre y cuando seamos cuidadosos al escoger el punto dentro del intervalo en el cual tomamos dy/dx . Además, en razón a que esta ley vale -no importa cuán pequeño sea el intervalo $(x_2 - x_1)$ - la aproximación deberá ser exacta para un intervalo infinitesimal).

PREGUNTA

Supongamos que medimos la pendiente de nuestra curva, dy/dx , en varios puntos, y construimos un gráfico de dy/dx versus x como se muestra en la figura. Nuevamente, supongamos que necesitamos saber el cambio en dy/dx que ocurre cuando x cambia de x_1 a x_2 . El sub-índice

1-2 se usa para denotar la evaluación en los puntos entre x_1 y x_2 . ¿Cuál de las siguientes expresiones producirá un valor aproximado para este cambio?

Pase a la Sección

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = (x_2 - x_1) \left(\frac{dy}{dx}\right)_{1-2} \quad 31$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{1-2}^2 (x_2 - x_1) \quad 13$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right)_{1-2} (x_2 - x_1) \quad 7$$

17"

Su respuesta en la Sección 1 es incorrecta. La proporción de acumulación en el tanque depende tanto de Q_1 como de Q_2 , pero no en la forma

como se expresa en su respuesta. La entrada al tanque deberá ser balanceada por la salida, por acumulación de agua en el tanque o por una combinación de estos factores.

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

18"

Su respuesta en la Sección 33,

$$Q_1 - Q_2 = K \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_1 - K \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_2,$$

es incorrecta. La respuesta considera tanto el flujo de entrada como el de salida como productos de la conductividad hidráulica y el gradiente de carga; pero hemos visto en la aplicación de la Ley de Darcy al problema, que cada una deberá ser producto de conductividad hidráulica, gradiente de carga y área de flujo.

Regrese a la Sección 33 y elija otra respuesta.

19"

Su respuesta en la Sección 10;

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t},$$

es correcta. La ecuación describe el movimiento del agua subterránea bajo condiciones asumidas

como simples, -es decir, cuando el acuífero es confinado, horizontal, homogéneo e isotrópico, y el movimiento es en una dirección (en la dirección del eje de las x).¹ Si los componentes horizontales del movimiento normal al eje de las x estuviesen presentes tendríamos que considerar los flujos de entrada y de salida a través de las otras caras del prisma; es decir, las dos

¹ Cooper (1966) expone con mayor detalle la ecuación de aguas subterráneas.

caras normales al eje de las y . Obtendríamos que la entrada menos la salida de flujo sería

$$Q_{y1} - Q_{y2} = Kb \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}.$$

El flujo total de entrada menos el de salida para el prisma sería entonces

$$(Q_{x1} - Q_{x2}) + (Q_{y1} - Q_{y2}),$$

donde $Q_{x1} - Q_{x2}$ representa el término obtenido previamente, $Kb \Delta x \Delta y (\partial^2 h / \partial x^2)$. Finalmente, igualando el flujo total de entrada menos el de salida al volumen de acumulación, tendríamos

$$Kb \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + Kb \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = S \Delta x \Delta y \frac{\partial h}{\partial t}$$

o utilizando la notación $T = Kb$ y dividiendo por $T \Delta x \Delta y$,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Estas son *ecuaciones diferenciales parciales*; es decir, son ecuaciones que contienen derivadas parciales. La relación presentada arriba para flujo en dos dimensiones es una ecuación diferencial parcial en tres variables independientes, x , y y t . Para más simplicidad, continuaremos la discusión en términos de la ecuación para un flujo unidireccional,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Esta es una ecuación diferencial parcial en dos variables independientes x y t . Relaciona la rapidez de cambio de carga con tiempo, a la rapidez con la cual la pendiente de la superficie potenciométrica, $\partial h / \partial x$, cambia con la distancia.

Con.—19"

Cuando decimos que requerimos una *solución* a esta ecuación diferencial parcial, queremos decir que buscamos una expresión que tenga carga h , como una función de la posición de x , y tiempo t , tal que cuando esta expresión es diferenciada dos veces con respecto a x (para obtener $\partial^2 h / \partial x^2$) y una vez con respecto a t (para obtener $\partial h / \partial t$), los resultados satisfacen la condición

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Tal como en las ecuaciones diferenciales ordinarias, habrá siempre un número infinito de expresiones que satisfacerán una ecuación diferencial parcial; la solución particular requerida para un problema deberá satisfacer, además, ciertas condiciones peculiares del problema. Al igual que en las ecuaciones diferenciales ordinarias, estas condiciones adicionales, llamadas condiciones límites, establecen los puntos iniciales en los cuales son medidos los cambios de h descritos por la ecuación diferencial.

Aquí concluye la Parte V. En la Parte VI haremos un desarrollo similar al de la Parte V, pero utilizando coordenadas polares y estudiando el problema de flujo de no equilibrio a un pozo. Nuestro método será el mismo; expresaremos la entrada y la salida en términos de la Ley de Darcy y la proporción de acumulación en términos de la ecuación de almacenamiento; entonces, relacionaremos los términos de flujo y almacenamiento por medio de la ecuación de continuidad. Consideraremos una solución particular de la ecuación diferencial parcial resultante y mostraremos cómo esta solución puede ser utilizada para encontrar otras soluciones, incluyendo la muy conocida ecuación de Theis.

20"

Su respuesta en la Sección 9,

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) + \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

es incorrecta. Si se construye un gráfico de y en

función de x , el cambio en y correspondiente a un pequeño cambio en x se obtiene por la relación: Cambio en $y =$ (Pendiente de la curva) \cdot (Cambio en x), donde la pendiente de la curva se mide cerca de donde se observa el cambio. Esto viene directamente de la definición de la pendiente de la curva.

Regrese a la Sección 9 y elija otra respuesta.

21"

Su respuesta en la Sección 1 es correcta. Si el agua se acumula en el tanque a una proporción de cinco pies cúbicos por minuto, el flujo de entrada deberá exceder al de salida por esa misma cantidad. Esto es esencialmente una expresión del principio de conservación de la masa. Debido a que la masa no puede ser destruida (excepto por conversión en energía, lo cual no se considera aquí), la diferencia entre la velocidad con la cual la masa ingresa al tanque y aquella que deja el tanque debe ser igual a la proporción de

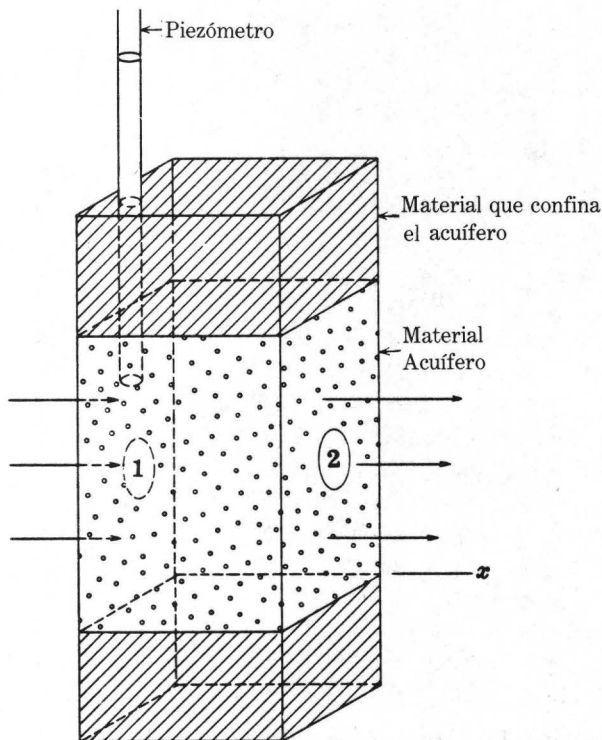
acumulación en el tanque. Como la compresión del agua no es significativa aquí, podemos usar volumen en vez de masa. En términos generales, la relación que nos ocupa puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} \text{Flujo de Entrada} - \text{Flujo de Salida} \\ = \text{Proporción de Acumulación.} \end{aligned}$$

Esta relación es a menudo denominada como la ecuación de continuidad.

Observe que si el flujo de salida excede al de entrada, la proporción de acumulación será negativa—es decir, tendremos agotamiento en vez de acumulación. Un caso importante y especial de esta ecuación es aquel en el cual el flujo de entrada y el de salida son iguales, por lo tanto la acumulación es cero. Como un ejemplo, consideremos un tanque en el cual el flujo de entrada es igual al de salida. La proporción de acumulación en el tanque es cero, y el nivel del agua no cambia con el tiempo. Se dice entonces que el flujo está en equilibrio o en régimen permanente. El problema que consideramos en la Parte III fue de esta clase; no se postularon cambios de carga con el tiempo, así que se consideraba implícita la suposición que el flujo de entrada era igual al de salida. Se puede asumir que los patrones de flujo permanecen iguales de un tiempo a otro.

Diferentes formas de la ecuación de continuidad se presentan en todas las ramas de la física. En electricidad, por ejemplo, si en un condensador la carga de entrada excede a la de salida, la carga deberá acumularse en la armadura del condensador y aumentar el voltaje. En la conducción del calor, si el flujo de entrada excede al de salida en una región, el calor deberá acumularse dentro de esta región, y elevarse la temperatura.



PREGUNTA

El diagrama muestra una sección prismática de un acuífero confinado. El agua fluye en la dirección x , es decir, entra al prisma por la cara 1 y sale del prisma por la cara 2. Un piezómetro o un pozo de observación mide la carga hidráulica dentro del prisma. Supongamos que la proporción volumétrica de ingreso de agua a través de la cara 1 excede la de la salida por la

cara 2. El nivel de agua en el piezómetro, entonces:

| | Pase a la Sección |
|-----------------------|-------------------|
| Permanecerá constante | 6 |
| Caerá continuamente | 5 |
| Se elevará | 30 |

Con.—21"

Su respuesta en la Sección 30,

$$Q_1 = -Kb\Delta y \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1,$$

es correcta. $(\partial h/\partial x)_1$ es la gradiente hidráulica en el punto y tiempo particulares que nos interesan. Simplemente introducimos esta expresión en la Ley de Darcy para obtener la proporción de flujo requerida.

Aquí estamos tratando el flujo de no-equilibrio; es decir, por lo general la entrada de flujo y la salida no son iguales; el flujo ocurre solamente en la dirección x ; aunque el flujo de salida de nuestro prisma del acuífero ocurre únicamente a través de la cara 2, como se muestra en el diagrama.

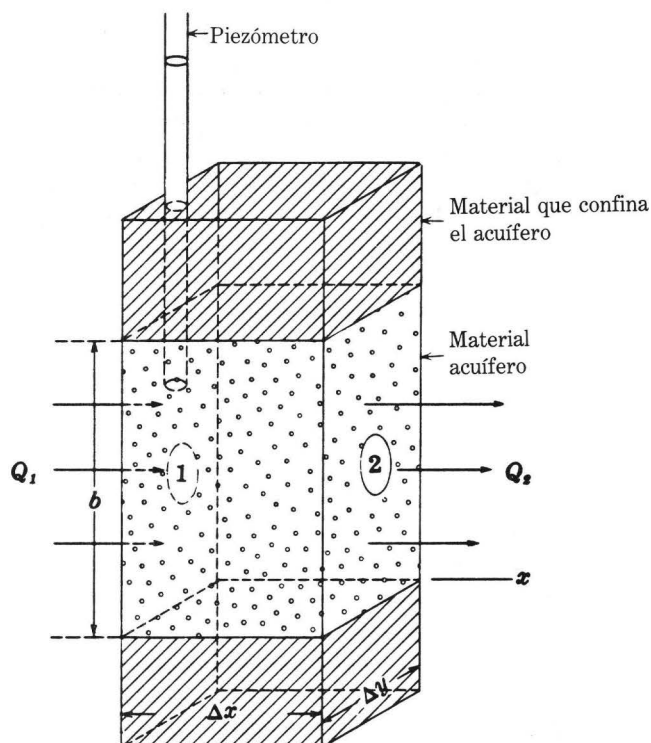
PREGUNTA

Asumiendo que el flujo de salida difiere del de entrada, que la conductividad hidráulica y el espesor del acuífero son constantes, ¿cuál de las siguientes expresiones es correcta?

Pase a la Sección

- | | |
|---|----|
| El nivel de agua en el prisma se eleva. | 14 |
| La gradiente hidráulica en la cara 2 del prisma deberá diferir de la cara 1 en el prisma. | 33 |
| La proporción de extracción del almacenamiento debe obtenerse por la Ley de Darcy. | 26 |

22"



23''

Su respuesta en la Sección 7,

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\partial x},$$

es incorrecta. Como hemos visto en las secciones anteriores de este capítulo, el cambio de una variable dependiente, sobre un intervalo pe-

queño del eje x , Δx , se obtiene por la multiplicación de la derivada de la variable por la longitud del intervalo. Aquí, la variable es $\partial h / \partial x$ y el término $\partial(\partial h / \partial x) / \partial x$ de su respuesta es ciertamente su derivada. Sin embargo, la derivada no se multiplica por el intervalo a lo largo del eje x ; por lo tanto la respuesta produce solamente la *proporción* de cambio de $\partial h / \partial x$ con distancia—no su cambio real a través del intervalo Δx .

Regrese a la Sección 7 y elija otra respuesta.

24''

Su respuesta en la Sección 10 es incorrecta. La proporción de acumulación en el almacenamiento se obtiene por

$$S \Delta x \Delta y \frac{\partial h}{\partial t},$$

tal como en la respuesta que usted eligió. Sin embargo, la expresión para el flujo de salida requiere una segunda derivada porque trata con la diferencia de dos términos de flujo, cada uno de los cuales incorpora una primera derivada. En su respuesta el flujo de entrada menos el flujo de salida se expresa en términos de una primera derivada.

Repase las Secciones 9, 32 y 34, y después regrese a la Sección 10 y elija otra respuesta.

25''

Su respuesta en la Sección 9,

$$y_2 - y_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{1-2} + (x_2 - x_1),$$

es incorrecta. Según la definición de pendiente, el cambio en y puede encontrarse por multiplicación del cambio en x por la pendiente de la curva, medida en el intervalo x_1 a x_2 . En la respuesta que usted eligió, la pendiente de la curva se suma al cambio en x .

Regrese a la Sección 9 y elija otra respuesta.

26''

Su respuesta en la Sección 22 es incorrecta. La Ley de Darcy describe la transmisión del

agua subterránea, no su desalojo del almacenamiento. La ecuación de almacenamiento, desarrollada en la Parte IV trata de los cambios en la cantidad de agua en el almacenamiento.

Regrese a la Sección 22 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 32,

$$Q_1 - Q_2 = K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Delta x,$$

es incorrecta. Su respuesta incluye la conductividad hidráulica, K , y el término

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Delta x,$$

el cual, como hemos vistos, es igual a

$$\left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 \right\}.$$

Por lo tanto, si ampliamos su respuesta, expresándola en los términos originales de gradiente de carga, tendríamos

27''

$$Q_1 - Q_2 = K \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 \right\} = K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 - K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1.$$

Esto significa que el flujo de entrada es un producto de la conductividad hidráulica y la gradiente de carga, y que el flujo de salida es similarmente un producto de la conductividad hidráulica y de la gradiente de carga. Por la Ley de Darcy, sabemos que tanto el flujo de entrada como el flujo de salida deben ser resultados del producto de la conductividad hidráulica, gradiente de carga y el área de flujo. Su respuesta no menciona el área de flujo dentro de la expresión de flujo de entrada menos flujo de salida.

Regrese a la Sección 32 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 34,

$$\frac{dV}{dt} = Sb \Delta x \frac{\partial h}{\partial t},$$

es incorrecta. La ecuación de almacenamiento expresa que la proporción de acumulación de agua almacenada en el prisma del acuífero es igual al producto del coeficiente de almacenamiento, la proporción de cambio de carga con el

28''

tiempo, y el área *base* del prisma. En su respuesta la proporción de acumulación se iguala al producto del coeficiente de almacenamiento, la proporción de cambio de carga con el tiempo y el área, $b \Delta x$, de una de las caras verticales del prisma.

Regrese a la Sección 34 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 1 es incorrecta. Parte del flujo de entrada al tanque se compensa con el de salida por la base. Para que su respuesta sea correcta, el flujo de salida, Q_2 , tendría que ser cero. Solamente en ese caso la proporción de acumulación en el tanque es igual

29''

a la entrada.

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

30''

Su respuesta en la Sección 21 es correcta. De acuerdo a la ecuación de continuidad, si el flujo de entrada al prisma del acuífero excede al flujo de salida, el agua debe acumularse en el prisma. De acuerdo a la ecuación de almacenamiento, si el agua se acumula en el prisma, la carga hidráulica en el prisma deberá aumentar con el tiempo. Específicamente, tenemos

Flujo de Entrada-Flujo de Salida

= Proporción de acumulación,¹ dV/dt

y

$$\frac{dV}{dt} = SA \frac{\partial h}{\partial t},$$

donde A es el área base del prisma. Por lo tanto,

$$\text{Entrada (flujo)} - \text{Salida} = SA \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Si el término (Flujo de Entrada-Flujo de Salida) es positivo—es decir, si el flujo de entrada excede al de salida—entonces $\partial h/\partial t$ deberá ser positivo, y los niveles de agua deberán ascender respecto al tiempo. En las ecuaciones anteriores hemos usado las derivadas parciales de carga con respecto al tiempo, $\partial h/\partial t$; y en las ecuaciones siguientes, usaremos la derivada parcial de carga con respecto a la distancia, $\partial h/\partial x$. Estas notaciones son utilizadas porque en este problema, la carga variará con respecto al tiempo y a la distancia.

PREGUNTA

El gráfico muestra el prisma de la Sección 21. Asumamos que este prisma se obtiene de un acuífero homogéneo e isotrópico, el cual es horizontal y de un espesor uniforme. Supongamos que $(\partial h/\partial x)_1$ representa la gradiente hidráulica (en la dirección x , que es la

dirección de flujo) en la cara 1 del prisma. Deseamos escribir una expresión para el flujo de entrada a través de la cara 1 del prisma.

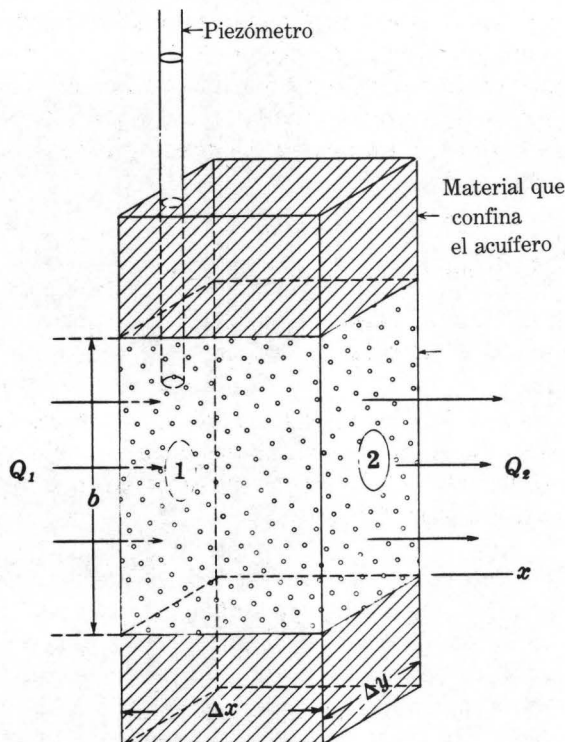
Denominemos este flujo de entrada como Q_1 , y la altura del prisma (que es el espesor del acuífero) como b . El ancho del prisma normal al eje de las x se denomina Δy , la longitud del prisma a lo largo del eje x como Δx , y la conductividad hidráulica del acuífero como K . ¿Cuál de las siguientes ecuaciones presenta la expresión requerida para el flujo de entrada en la cara 1?

Pase a la Sección

$$Q_1 = -Kb\Delta y \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 \quad 22$$

$$Q_1 = Kb\Delta x\Delta y \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 \quad 8$$

$$Q_1 = \frac{-K}{b\Delta y} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 \quad 3$$



¹ Nuevamente, aquí utilizamos el volumen en vez de masa para la ecuación de continuidad, aunque una ligera compresión o expansión del agua puede ser un factor que contribuya al almacenamiento confinado. Los cambios en la densidad de fluido de un punto a otro en una situación normal en agua subterránea son suficientemente pequeños para permitir esta aproximación. En este caso no será posible utilizar la fórmula simple del coeficiente de almacenamiento definido en términos de volumen de fluido, así como se planteó.

Su respuesta en la Sección 16,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = (x_2 - x_1) \left(\frac{dy}{dx}\right)_{1-2},$$

es incorrecta. En las secciones anteriores vimos que el cambio en la variable dependiente se obtiene multiplicando el cambio, $x_2 - x_1$, en la variable independiente por la derivada de la variable dependiente con respecto a x . Aquí la

variable dependiente es dy/dx ; pero su respuesta no tiene la derivada de esta variable dependiente con respecto a x — tiene, en cambio, sólo la derivada de y con respecto a x .

Regrese a la Sección 16 y elija otra respuesta.

31''

Su respuesta en la Sección 7,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cdot \Delta x,$$

es correcta. Este término es equivalente al término

$$\left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_1 \right\},$$

si se escoge un punto adecuado dentro del intervalo $x_2 - x_1$ en el cual se evalúa $\partial^2 h / \partial x^2$. El producto, $(\partial^2 h / \partial x^2) \Delta x$ representa la pendiente de un gráfico de $\partial h / \partial x$ versus x , multiplicado por el intervalo a lo largo de un eje x , Δx , y por lo tanto se obtiene el cambio en $\partial h / \partial x$ sobre este intervalo.

PREGUNTA

Utilizando esta expresión para

$$\left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_1 \right\},$$

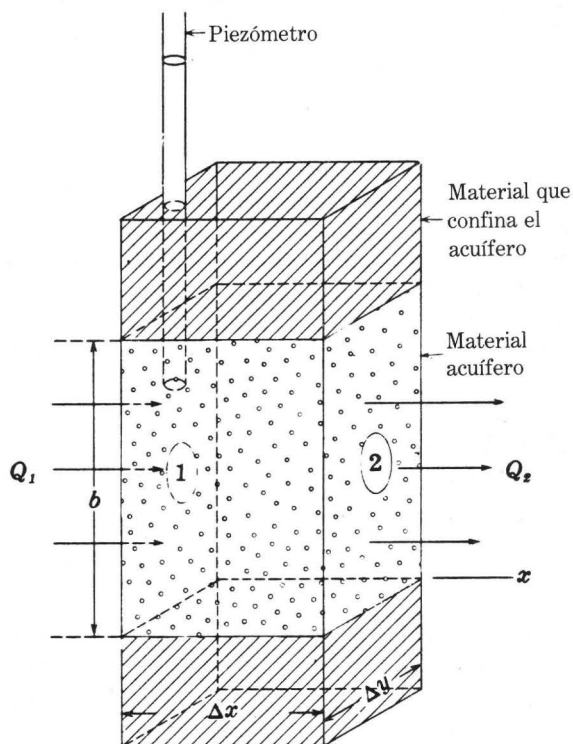
¿cuál de las siguientes formas es la expresión correcta para flujo de entrada menos flujo de salida, $Q_1 - Q_2$, para el prisma del acuífero mostrado en el diagrama?

Pase a la Sección

$$Q_1 - Q_2 = K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Delta x \quad 27$$

$$Q_1 - Q_2 = Kb \Delta y \Delta x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad 34$$

$$Q_1 - Q_2 = K \frac{\partial h}{\partial x} \quad 2$$



32''

33''

Su respuesta en la Sección 22 es correcta. Si aplicamos la Ley de Darcy a la cara 2, obtenemos

$$Q_2 = -Kb\Delta y \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2,$$

mientras que para la cara 1 teníamos

$$Q_1 = -Kb\Delta y \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1.$$

K , b , y Δy no cambian. Por eso, si el flujo de salida, Q_2 , es diferente al flujo de entrada, Q_1 , las gradientes hidráulicas en las caras de entrada y

salida de flujo deberán ser diferentes; es decir, $(\partial h/\partial x)_2$ deberá ser diferente de $(\partial h/\partial x)_1$.

PREGUNTA

Utilizando las expresiones desarrolladas para el flujo de entrada y salida, ¿cuál de los siguientes términos describirá el flujo de salida menos el flujo de entrada en el prisma?

Pase a la Sección

$$Q_1 - Q_2 = K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 - K \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 \quad 18$$

$$Q_1 - Q_2 = \frac{S}{K} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 \quad 15$$

$$Q_1 - Q_2 = Kb\Delta y \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 \right\} \quad 9$$

34''

Su respuesta en la Sección 32,

$$Q_1 - Q_2 = Kb\Delta y \Delta x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2},$$

es correcta. El término Kb , que representa la conductividad hidráulica del acuífero multiplicado por el espesor, se denomina la transmisividad del acuífero y se designa con la letra T . Utilizando esta notación, la expresión para el flujo de entrada menos el flujo de salida se convierte en

$$Q_1 - Q_2 = T\Delta y \Delta x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

De acuerdo a la ecuación de continuidad, este flujo de entrada menos el de salida es igual a la proporción de acumulación de agua en el almacenamiento dentro del prisma del acuífero como se muestra en la figura.

PREGUNTA

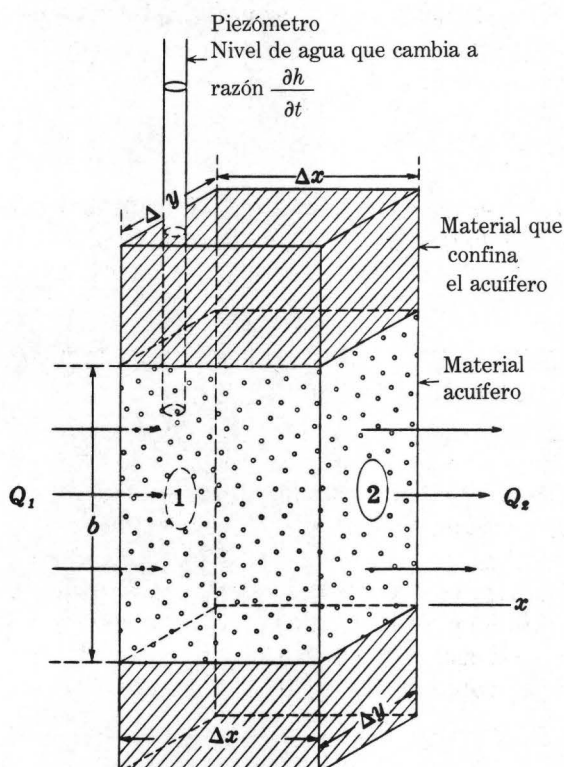
El promedio de rapidez de cambio de carga en el prisma del acuífero se representa por $\partial h/\partial t$ y el área de su base por $A = \Delta x \Delta y$. Utilizando la ecuación de almacenamiento, ¿cuál de las siguientes expresiones presenta la proporción de acumulación en el almacenamiento dentro del prisma?

Pase a la Sección

$$\frac{dV}{dt} = Sb\Delta x \frac{\partial h}{\partial t} \quad 28$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{S}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad 12$$

$$\frac{dV}{dt} = S\Delta x \Delta y \frac{\partial h}{\partial t} \quad 10$$



Parte VI. Flujo de No-equilibrio a un Pozo

Introducción

En la Parte V, desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

para flujo unidimensional de no-equilibrio en un acuífero confinado, isotrópico y homogéneo. Indicamos, además, que el flujo en dos dimensiones produciría la ecuación

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

En la Parte VI, consideramos un problema que implica flujo hacia, o de un pozo en el acuífero. Igual que en el problema de flujo en estado continuo hacia un pozo, como analizamos en la Parte III, consideramos conveniente utilizar en esta Parte las coordenadas polares. La ecuación diferencial en dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

puede ser transformada en coordenadas polares utilizando métodos clásicos. Sin embargo, es útil e instructivo derivar la ecuación de los principios

hidráulicos en la forma en la cual se va a utilizar. Después de desarrollar la ecuación en esta forma, consideraremos una de sus soluciones correspondientes a cambios o alteraciones instantáneas en el acuífero. En la terminología de análisis de sistemas, esta solución producirá la "respuesta impulso" (impulse response) del sistema acuífero-pozo. Al considerar esta solución, mostraremos, primero por diferenciación, que ésta satisface la ecuación diferencial original; posteriormente desarrollaremos las condiciones límites aplicables al problema y mostraremos que la solución satisface estas condiciones. A continuación de la sección programada en la Parte VI, se ha agregado una discusión en forma de texto que muestra cómo la solución "respuesta impulso" puede ser usada para sintetizar las soluciones correspondientes a alteraciones más complejas en el acuífero. En particular, las soluciones se han sintetizado para el caso de descarga repetida o extracción (bailing) de un pozo y para el caso de bombeo continuo del mismo. Esta última solución, para el caso particular en el cual la proporción de bombeo es constante, es la ecuación de Theis la cual se usa comúnmente en análisis de pruebas de acuíferos.

La figura muestra un pozo penetrando un acuífero confinado. Una capa cilíndrica o prisma, coaxial al pozo que se extiende a través del espesor total b del acuífero, se ha delimitado en el diagrama. El ancho radial de este elemento cilíndrico se designa como Δr ; la superficie interior del elemento está a un radio r_1 del eje del pozo, el cual se toma como el origen del sistema de las coordenadas polares; y la superficie ex-

terior del elemento está a un radio r_2 de este eje. Asumimos que el flujo se orienta en una dirección radial, así que no necesitamos considerar variaciones en las direcciones vertical o angular. Además, asumimos que estamos tratando con la inyección de agua en el acuífero a través del

pozo, así que el flujo se aleja del pozo en la dirección positiva r . La conductividad hidráulica del acuífero se denota como K , la transmisividad T , y el coeficiente de almacenamiento S .

PREGUNTA

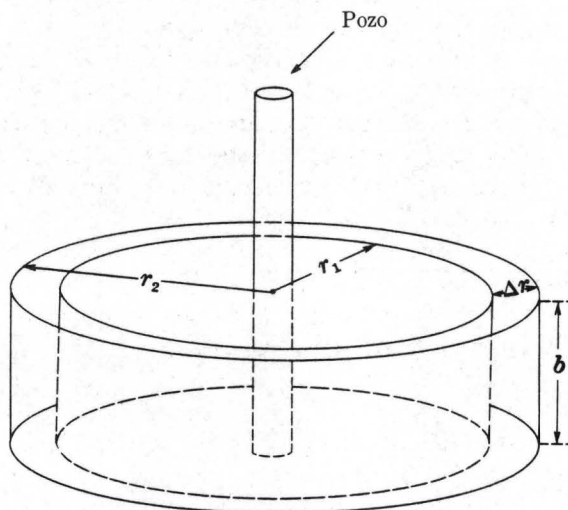
Si $(\partial h / \partial r)_1$ representa la gradiente hidráulica de la cara interior del elemento cilíndrico, ¿cuál de las siguientes expresiones se obtendrá para el flujo a través de esta cara al utilizar la Ley de Darcy?

Pase a la Sección

$$Q_1 = -K\pi r_1^2 \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 \quad 34$$

$$Q_1 = -K2\pi r_1 b \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 \quad 15$$

$$Q_1 = \frac{-Kb \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_1}{2\pi r_1} \quad 36$$



1+ — Con.

2+

Su respuesta en la Sección 27,

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi T t} e^{-(Sr^2/4Tt)},$$

es incorrecta.

Es correcta su intención de multiplicar la derivada de $e^{-(Sr^2/4Tt)}$ por el coeficiente "constante" $V/(4\pi T t)$ para obtener la derivada del producto

$$\frac{V}{4\pi T t} e^{-(Sr^2/4Tt)},$$

con respecto a r . Sin embargo, su diferenciación de $e^{-(Sr^2/4Tt)}$, es incorrecta. La derivada de e elevada a una potencia, no es simplemente e elevada a la misma potencia, como usted escribió, pero es el producto de e elevada a esa potencia por la derivada del exponente. Es decir,

$$\frac{de^u}{dr} = e^u \frac{du}{dr}.$$

Además, en este caso, debemos obtener la derivada del exponente, $-(Sr^2/4Tt)$, y multiplicar $e^{-(Sr^2/4Tt)}$ por esta derivada para obtener la derivada de $e^{-(Sr^2/4Tt)}$ con respecto a r .

Regrese a la Sección 27 y elija otra respuesta.

Sus respuesta en la Sección 35,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{V}{4\pi Tt} \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)} \left(\frac{Sr^2}{4Tt^2} \right),$$

es incorrecta. En su respuesta, el término $e^{-(Sr^2/4Tt)}$ está diferenciado correctamente con respecto al tiempo. Sin embargo, su respuesta da solamente la derivada de esta factor multiplicado por el factor mismo, $V/(4\pi Tt)$. De acuerdo a la regla de diferenciación de un producto, debemos añadir a este término el segundo factor, $e^{-(Sr^2/4Tt)}$, multiplicado por la derivada del

primer factor. Este factor, $V/(4\pi Tt)$, se consideró como un coeficiente constante cuando estábamos diferenciando con respecto a r debido a que no contiene r . Sin embargo, sí contiene t y no puede ser tratado como una constante cuando estamos diferenciando con respecto a t . La derivada de este factor respecto a t se presenta en la discusión de la Sección 35.

Regrese a la Sección 35 y elija otra respuesta.

3+

Su respuesta en la Sección 27,

$$\frac{\partial h}{\partial r} = e^{-(Sr^2/4Tt)} \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right),$$

es incorrecta.

Cuando una expresión se multiplica por un coeficiente constante, la derivada del producto es simplemente el coeficiente constante multiplicado por la derivada de la expresión. Por ejemplo, la derivada de la expresión x^2 , con respecto a x , es $2x$; pero si x^2 es multiplicado por el coeficiente constante c , la derivada del producto cx^2 , es $c \cdot 2x$.

En la pregunta de la Sección 27, el término $e^{-(Sr^2/4Tt)}$ es en realidad la expresión que debemos diferenciar con respecto a r . El término,

$V/(4\pi Tt)$, representa un coeficiente constante—constante con respecto a esta diferenciación, por no contener r . Por lo cual el resultado obtenido como la derivada de $e^{-(Sr^2/4Tt)}$ debe ser multiplicado por su coeficiente, $V/(4\pi Tt)$, para obtener la derivada del producto

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)}.$$

Su diferenciación de $e^{-(Sr^2/4Tt)}$ es correcta, pero su respuesta no contiene el factor $V/(4\pi Tt)$ y por lo tanto no puede ser correcta.

Regrese a la Sección 27 y elija otra respuesta.

4+

Su respuesta en la Sección 27,

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right),$$

es correcta.

Tenemos que diferenciar esta expresión por $\partial h/\partial r$, para obtener $\partial^2 h/\partial r^2$. Por lo tanto, consideramos la expresión como el producto de dos factores. El primero es la función que recién diferenciamos,

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)};$$

el segundo es

$$\left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right),$$

Una vez más, estamos diferenciando con respecto a r , así que t se considera como una constante.

5+

Con.—5⁺

PREGUNTA

Si seguimos las reglas de diferenciación de un producto (el primer factor multiplicado por la derivada del segundo, más el segundo factor por la derivada del primero), ¿cuál de los siguientes resultados obtendremos para $\partial^2 h / \partial r^2$?

Pase a la Sección

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{V}{4\pi T t} \left\{ e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2S}{4Tt} \right) + \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \right\} \quad 35$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{V}{4\pi T t} \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2S}{4Tt} \right) + \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \quad 23$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{V}{4\pi T t} \left\{ e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2S}{4Tt} \right) + \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \right\} \quad 9$$

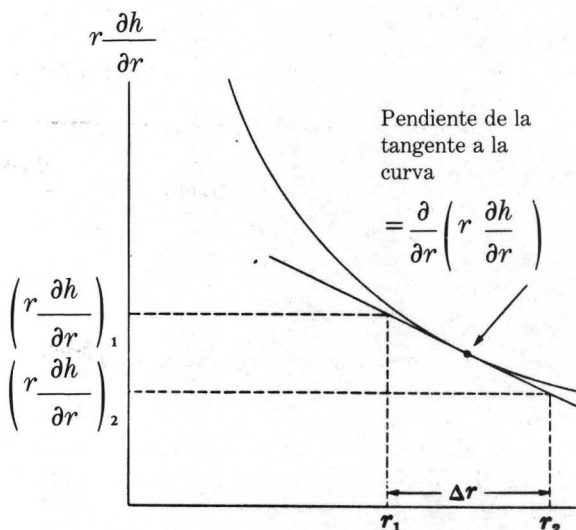
6⁺

Su respuesta en la Sección 18 es incorrecta. La respuesta que usted escogió expresa que la

carga pasa a ser infinita cuando la distancia radial se torna pequeña. El comportamiento que deseamos describir es aquel en el cual la carga es insignificante o se aproxima a cero, a medida que la distancia radial se torna muy grande.

Regrese a la Sección 18 y elija otra respuesta.

7⁺



Su respuesta en la Sección 15,

$$Q_1 - Q_2 = 2\pi T \left\{ \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_2 - \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 \right\},$$

es correcta. El término

$$\left\{ \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_2 - \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 \right\},$$

en realidad, representa el cambio en la variable $r(\partial h / \partial r)$ entre los límites radiales, r_1 y r_2 , de nuestro elemento. Si nos imaginamos un gráfico de $r(\partial h / \partial r)$ versus r , como en la figura, podemos ver que el cambio se obtendrá aproximadamente por la pendiente del gráfico multiplicado por el incremento radial, Δr . Es decir, aproximadamente,

$$\left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right)_2 - \left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right)_1 = \frac{\partial \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)}{\partial r} \cdot \Delta r,$$

en el cual la derivada

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right)}{\partial r}$$

representa la pendiente del gráfico en un punto particular dentro del elemento. Esta pendiente o derivada, es negativa en nuestra ilustración, así que

$$\left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right)_1 > \left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right)_2.$$

La aproximación inherente en la ecuación anterior pasa a ser progresivamente más exacta cuando Δr decrece en tamaño.

PREGUNTA

Recordando que la regla de diferenciación de un producto es "el primer factor multiplicado

Con.—7+

por la derivada del segundo, más el segundo factor por la derivada del primer factor", ¿cuál de las siguientes ecuaciones produce la derivada de $r(\partial h/\partial r)$ con respecto a r ?

Pase a la Sección

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right)}{\partial r} = r \frac{\partial \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial r} r \quad 26$$

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right)}{\partial r} = r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{\partial h}{\partial r} \quad 28$$

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right)}{\partial r} = 2r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \quad 8$$

Su respuesta en la Sección 7,

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right)}{\partial r} = 2r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2},$$

es incorrecta. Necesitamos obtener la derivada del producto $r(\partial h/\partial r)$. La regla de diferenciación de un producto es fácil de recordar. El primer factor por la derivada del segundo, más el segundo factor por la derivada del primero; es decir,

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Una derivación de esta fórmula puede encontrarse en cualquier texto clásico de cálculo. Nuestro primer factor es r y nuestro segundo factor es $\partial h/\partial r$. Entonces, debemos formar la expresión: r por la derivada de $\partial h/\partial r$ con respecto a r más $\partial h/\partial r$ por la derivada de r con respecto a r .

Regrese a la Sección 7 y elija otra respuesta.

8+

Su respuesta en la Sección 5,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{V}{4\pi Tt} \left\{ e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2S}{4Tt} \right) + \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)} \right\},$$

es incorrecta. Si sacamos las llaves y separamos su respuesta en dos términos, tenemos

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2S}{4Tt} \right) + \left(\frac{-2Sr}{4\pi Tt} \right) \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)}.$$

9+

9+ — Con.

El primer término, de acuerdo a las reglas de diferenciación de un producto, es correcto, debido a que representa el primer factor,

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)}$$

multiplicado por la derivada del segundo (con respecto a r), el cual es simplemente

$$\frac{-2S}{4Tt}.$$

Sin embargo, el segundo término de su respuesta es incorrecto.

$$\frac{-2Sr}{4Tt}$$

es el segundo factor del producto que deseamos diferenciar pero,

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)}$$

no representa la derivada del primer factor. Este factor es por si mismo

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)},$$

y su derivada con respecto a r se obtuvo en respuesta a la pregunta de la Sección 27.

Regrese a la Sección 5 y elija otra respuesta.

10+

Su respuesta en la Sección 21 es incorrecta. Se estableció en la discusión de la Sección 21 que el incremento en carga dentro del pozo a un tiempo $t=0$, debido a la inyección del volumen V , se obtendría por V/A_w donde A_w es el área de la sección del diámetro del pozo. Si el radio del

pozo tiende a cero, A_w deberá aproximarse a cero. A menor A_w se tiene mayor cociente V/A_w ; por ejemplo, $1/0.0001$ es en realidad mucho mas grande que $1/1$. En su respuesta, el cambio de carga es cero; esto podría ser cierto solamente si el área del pozo fuera inmensurablemente grande, así que al añadir un volumen finito de agua se producirían efectos no mensurables.

Regrese a la Sección 21 y elija otra respuesta.

11+

Su respuesta en la Sección 33 es incorrecta. La integración en la ecuación

$$V = \int_{r=0}^{r=\infty} S \cdot h_{r,t} \cdot 2\pi r dr$$

no puede efectuarse antes de sustituir una función claramente definida de r para el término $h_{r,t}$. Si no hacemos esto antes, no sabríamos siquiera qué función estamos tratando de in-

tegrar. Aún si la integración se pueda llevar a cabo y se obtenga el resultado de

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(r^2 S/4Tt)}$$

entonces, podríamos obtener

$$V = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(r^2 S/4Tt)},$$

la cual jamás podría ser satisfecha excepto para valores aislados de r y t .

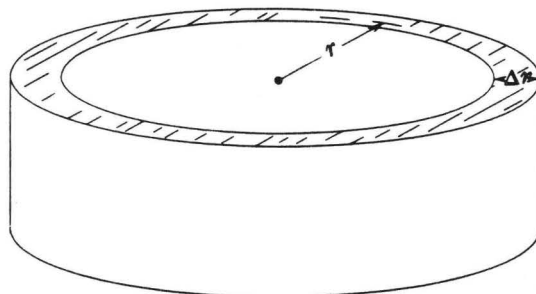
Regrese a la Sección 33 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 28,

$$\frac{dV}{dt} = S\pi r^2 \frac{\partial h}{\partial t},$$

es incorrecta. La ecuación de almacenamiento expresa que la proporción de acumulación en el almacenamiento es igual al producto del coeficiente de almacenamiento, la rapidez de cambio de carga con tiempo y el área base del elemento (prisma) del acuífero en consideración. Su respuesta contiene el coeficiente de almacenamiento, S , y el tiempo de la velocidad del cambio, $\partial h/\partial t$. Sin embargo, el área de la base del prisma en consideración no se obtiene por πr^2 .

Este término produce el área de un círculo extendido desde el origen hasta el radio r ; nuestro prisma es en realidad una corteza cilíndrica



hueca que se extiende del radio r_1 al radio r_2 . El área de la base se representa en la figura como el área sombreada. Esta región tiene un ancho radial de Δr y un perímetro promedio de $2\pi r$.

Regrese a la Sección 28 y elija otra respuesta.

12+

Su respuesta en la Sección 33 es correcta. La solución propuesta para h como una función de r y t es

$$h_{r,t} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(r^2 S/4Tt)}.$$

Para comprobar que esta solución está de acuerdo con las condiciones requeridas sustituimos

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(r^2 S/4Tt)}.$$

por $h_{r,t}$ en la ecuación

$$V = \int_{r=0}^{r=\infty} S \cdot h_{r,t} \cdot 2\pi r dr$$

y evaluamos la integral para ver si la ecuación se satisface. La sustitución produce

$$V = \int_{r=0}^{r=\infty} S \cdot \frac{V}{4\pi Tt} \cdot e^{-(r^2 S/4Tt)} \cdot 2\pi r dr.$$

Los términos constantes pueden ser tomados fuera de la integral con respecto a r , así que t puede ser tomada como una constante y también sacada de la integral. Dejamos el factor 2 como

la integral por el momento y sacamos las constantes restantes para obtener:

$$V = \frac{SV}{4Tt} \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-(r^2 S/4Tt)} \cdot 2r dr.$$

Para evaluar la integral en esta forma, utilizamos una simple sustitución algebraica. Hagamos que

$$z = r^2;$$

entonces

$$dz = 2r dr;$$

ahora digamos que

$$a = \frac{S}{4Tt}.$$

Sustituyendo esos términos en la ecuación anterior, obtenemos:

$$V = aV \int_{z=0}^{z=\infty} e^{-az} dz.$$

13+

13⁺ — Con.

La integral indefinida de e^{-az} es simplemente

$$-\frac{1}{a}e^{-az};$$

es decir,

$$\int e^{-az} dz = -\frac{1}{a} e^{-az} + c,$$

donde c es una constante de integración. El límite infinito superior en nuestro problema se manipula por los métodos clásicos; los pasos son los siguientes:

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^{z=\infty} e^{-az} dz &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-az} dz \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{a} e^{-az} \right\}_{z=0}^{z=b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e^{ab}} - \left(-\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e^0} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{a} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{e^{ab}} \right\} \right) + \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

pero

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{e^{ab}} \right\} = 0,$$

así que

$$\int_{z=0}^{z=\infty} e^{-az} dz = \frac{1}{a};$$

Por lo tanto,

$$aV \int_{z=0}^{z=\infty} e^{-az} dz = aV \cdot \frac{1}{a} = V.$$

Esto verifica que nuestra función

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(r^2 S/4Tt)}$$

en realidad satisface las condiciones requeridas —es decir, que cuando sustituimos este término por $h_{r,t}$ en la expresión

$$\int_{r=0}^{r=\infty} S \cdot h_{r,t} \cdot 2\pi r dr$$

y efectuamos la integración, el resultado es en realidad igual a V , que es el volumen de agua inyectada, como se requiere por la condición.

Hemos mostrado, entonces, que la expresión

$$h = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(r^2 S/4Tt)}$$

satisface la ecuación diferencial para flujo radial en un acuífero y también satisface las condiciones límites asociadas con la inyección instantánea de un volumen de agua al pozo en su inicio cuando $t=0$. Por lo tanto, es la solución particular requerida para este problema. Es una solución importante por dos razones. Primero, describe aproximadamente qué sucede cuando una recarga de agua se añade repentinamente a un pozo en el "slug test" clásico (Ferris y Knowles, 1963) y proporciona un medio para estimar la transmisividad a través de dicha prueba.¹ En segundo lugar, y lo más importante, produce la "respuesta impulso" del sistema acuífero-pozo-la solución correspondiente a una alteración o perturbación instantánea. Soluciones para perturbaciones de tipo más complejo, tales como inyecciones o descargas repetidas o descargas continuas, pueden ser sintetizadas de esta solución elemental. Después de la Sección 37 se presenta un análisis tipo texto que esboza la forma en la cual las soluciones correspondientes a extracciones repetidas o bombeo constante de un pozo, pueden construirse de la solución "respuesta impulso".

Aquí concluye la instrucción programada de la Parte VI. Puede proceder con el análisis tipo texto a continuación de la Sección 37. Lectores que prefieran pueden proceder con la Parte VII.

¹ Una publicación posterior (Cooper, Bredehoeft y Papadopoulos, 1967) da una descripción más precisa del efecto real de añadir una recarga de agua a un pozo, considerando la inercia de la columna de agua en el pozo. Este factor no fue considerado en el análisis original.

Su respuesta en la Sección 33 es incorrecta. La condición que debía cumplirse era

$$V = \int_{r=0}^{r=\infty} S \cdot h_{r,t} \cdot 2\pi r dr.$$

Por definición una solución a nuestra ecuación diferencial es una expresión que presenta la carga, h , a cualquier radio, r , y tiempo, t , de tal forma que satisfaga la ecuación diferencial. Aquí el propósito es probar tal solución para ver si *también* satisface la condición requerida en la ecuación anterior. La solución en realidad

representa la carga, $h_{r,t}$; si se sustituye por la cantidad $2\pi r$, como su respuesta sugiere, habrán dos términos, $h_{r,t}$ y nuestra solución, ambos representando la carga en la ecuación resultante. Aún más, si el resultado de la integración fuera $2\pi S$ obtendríamos el resultado $V = 2\pi S$, el cual no satisface la condición requerida.

Regrese a la Sección 33 y elija otra respuesta.

14+

Su respuesta en la Sección 1,

$$Q_1 = -K2\pi r_1 b \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_1,$$

es correcta. Los términos 2π , K y b son todos constantes; reemplazaremos el producto Kb por T , como antes. Los términos variables, r y $\partial h/\partial r$, pueden ser combinados y considerados como una simple variable, $r(\partial h/\partial r)$. El valor de esta variable en la cara interior del elemento cilíndrico se designará como $(r\partial h/\partial r)_1$. Utilizando esta notaciones, nuestra expresión para entrada del flujo a través de la cara interior del elemento cilíndrico será ahora

$$Q_1 = -2\pi T \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_1.$$

PREGUNTA

Supongamos que continuamos considerando el producto $r(\partial h/\partial r)$ como una sola variable, y hacemos que $(r\partial h/\partial r)_2$ designe el valor de esta

variable en la cara exterior del elemento cilíndrico. La expresión de flujo de salida, Q_2 , a través de la superficie cilíndrica exterior puede ser escrita entonces en términos de $(r\partial h/\partial r)_2$, en una forma similar a la ecuación para la entrada de flujo. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones podría ser obtenida para el flujo de entrada menos el de salida, $Q_1 - Q_2$, para nuestro elemento cilíndrico?

Pase a la Sección

$$Q_1 - Q_2 = 2\pi T \left\{ \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_2 - \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 \right\} \quad 7$$

$$Q_1 - Q_2 = 2\pi T \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 \cdot \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_2 \quad 30$$

$$Q_1 - Q_2 = 2\pi T \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 \right\} \quad 25$$

Su respuesta en la Sección 28.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{S \frac{\partial h}{\partial t}}{2\pi r \Delta r},$$

es incorrecta. La ecuación de almacenamiento nos indica que la cantidad de acumulación en el almacenamiento debe ser igual al *producto* del coeficiente de almacenamiento, la rapidez de cambio de carga con respecto al tiempo y el área

base del elemento (prisma) del acuífero considerado. Nuestro elemento, o prisma del acuífero es una capa cilíndrica que se extiende del radio r_1 al radio r_2 . Su área base se obtiene por el término $2\pi r \Delta r$. Sin embargo, en su respuesta este término del área está dividiendo al término $S(\partial h/\partial t)$.

Regrese a la Sección 28 y elija otra respuesta.

16+

17⁺

Su respuesta en la Sección 20,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi T t} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left\{ \frac{-2S}{4Tt} + \frac{2S^2 r^2}{16T^2 t^2} \right\}, \text{ no es igual a}$$

es incorrecta. El error en esta respuesta proviene de un error algebraico al simplificar el

segundo término de la expresión para $\partial^2 h / \partial r^2$. El producto

$$\left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \cdot \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right),$$

$$\frac{2S^2 r^2}{16T^2 t^2}.$$

Regrese a la Sección 20 y elija otra respuesta.

18⁺

Su respuesta en la Sección 21 es correcta; la carga es inmensurablemente grande, o infinita, en el pozo al punto $t=0$. Considerando este resultado junto a nuestro requisito que la carga debe ser cero en cualquier parte del acuífero para $t=0$, podemos expresar la condición límite para $t=0$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} h &\rightarrow \infty, \text{ para } r=0 \text{ y } t=0 \\ h &= 0, \text{ para } r>0 \text{ y } t=0. \end{aligned}$$

Ahora, podemos probar nuestra solución, para ver si satisface esta condición. Probablemente la forma más fácil de hacerlo es expandir el término $e^{-(Sr^2/4Tt)}$ en una serie Maclaurin. La teoría de este tipo de expansión de series se analiza en textos clásicos de cálculo; el resultado, aplicado a nuestra función exponencial, tiene la siguiente forma

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

o para un exponente negativo,

$$e^{-x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}.$$

En nuestro caso, x es el término $r^2 S / 4Tt$, y

$$e^{-(r^2 S / 4Tt)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{r^2 S}{4Tt} \right) + \frac{\left(\frac{r^2 S}{4Tt} \right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{r^2 S}{4Tt} \right)^3}{3!} + \dots}$$

así que

$$\frac{V}{4\pi T t} e^{-(r^2 S / 4Tt)} =$$

$$\frac{V}{4\pi T t + r^2 S + \frac{r^4 S^2 \pi}{4Tt \cdot 2!} + \frac{r^6 S^3 \pi}{16T^2 t^2 \cdot 3!} + \dots}.$$

Ahora, mientras t se aproxima a cero, el primer término del denominador se aproxima a cero; el segundo término permanece constante, el tercero y todos los términos de grado mayor pasan a ser infinitos, siempre que r no tienda a cero también. Si cualquier término en el denominador es infinito, la fracción entera pasa a ser cero. Por lo tanto la expresión

$$\frac{V}{4\pi T t} e^{-(r^2 S / 4Tt)}$$

es cero para $t=0$ y $r \neq 0$, y satisface la primera parte de nuestra condición.

Si r y t tienden a cero, los primeros dos términos en el denominador de nuestra fracción serán cero. El tercero se comportará en la misma forma como la fracción cx^4/kx se compor-

ta cuando x se aproxima a cero, debido a que r y t se aproximan a cero en la misma forma. El límite de cx^4/kx cuando x tiende a cero es 0, debido a que

$$\frac{cx^4}{kx} = \frac{c}{k}x^3.$$

Por lo tanto, el tercer término en el denominador debe también tender al límite cero cuando r y t tienden a cero. Por un análisis similar, se puede demostrar que el límite de cada término sucesivo en el denominador es cero cuando r y t tienden a cero. Por lo tanto, todo el denominador es cero y la fracción entera es infinita, así que el término

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(r^2 S/4Tt)}$$

es infinito cuando r y t son ambos cero, cumpliéndose la segunda parte de nuestra condición.

Otra forma muy instructiva de investigar el comportamiento de la función

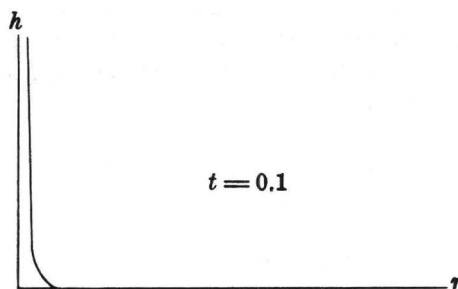
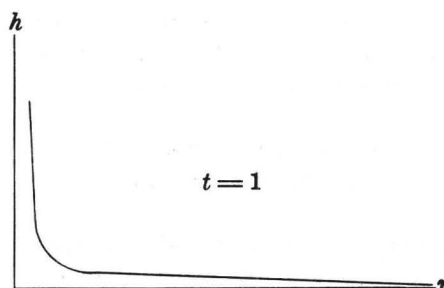
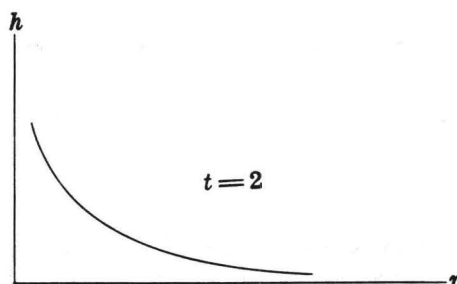
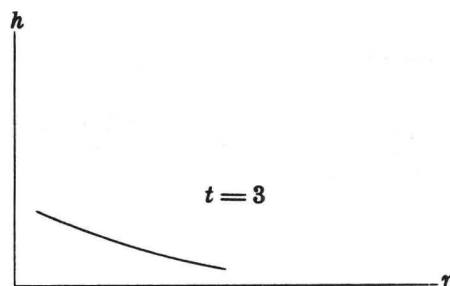
$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(r^2 S/4Tt)}$$

es construir un gráfico de esta función versus r , para valores de tiempo más y más pequeños. Las figuras muestran las formas que tomarían tales gráficos. Se puede indicar que cuando t se aproxima a cero, para $r=0$, la función tiende a la forma de un "gancho" o impulso. La forma de esta curva sugiere una distribución de carga que se puede delinear intuitivamente, si nos solicitaran describir la respuesta de un acuífero a la inyección de un volumen pequeño de agua. Se sugiere al lector construir algunos de estos gráficos, para familiarizarse con el comportamiento de esta función.

PREGUNTA

Se asume que el acuífero se extiende infinitamente, y el volumen de agua inyectado es muy pequeño. Entonces, sería de esperar que los efectos de la inyección desaparezcan a una distancia grande del pozo. ¿Cuál de las siguientes expresiones es una formulación matemática de este comportamiento y sería utilizada como una condición límite para nuestro problema?

Con.—18⁺



Pase a la Sección

| | |
|--|----|
| $h \rightarrow 0$ a medida que $r \rightarrow \infty$ | 33 |
| $h \rightarrow \infty$ a medida que $t \rightarrow \infty$ | 29 |
| $h \rightarrow \infty$ a medida que $r \rightarrow 0$ | 6 |

19⁺

Su respuesta en la Sección 21 es incorrecta. Hemos establecido en la discusión de la Sección 21 que la elevación del nivel de agua en el pozo para $t=0$ debe darse por la expresión $h = V/A_w$, donde A_w es el área de sección transversal del interior del pozo y V es el volumen de agua inyectada. Para que h tenga el valor instantáneo de 1

pie, V , dado en pies cúbicos, tendrá que ser igual numéricamente a A_w , en pies cuadrados. Sin embargo, estamos asumiendo que el pozo tiene un radio infinitésimamente pequeño, así que A_w , su sección, se aproxima a cero. Si se asignan valores cada vez más pequeños al denominador, A_w , mientras que el numerador, V , se mantiene constante, la fracción V/A_w tendrá valores cada vez más grandes.

Regrese a la Sección 21 y elija otra respuesta.

20⁺

Su respuesta en la Sección 35,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left(\frac{Sr^2}{4Tt^2} \right) + e^{-(Sr^2/4Tt)} \left(\frac{-V}{4\pi Tt^2} \right),$$

es correcta. Si el término

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)}$$

es factorizado de esta expresión, tenemos

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left\{ \frac{Sr^2}{4Tt^2} - \frac{1}{t} \right\},$$

y si multiplicamos esta ecuación por S/T , obtenemos

$$\frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left\{ \frac{S^2 r^2}{4T^2 t^2} - \frac{S}{Tt} \right\}.$$

Nuestra expresión para $\partial h/\partial r$, obtenida en respuesta a la pregunta de la Sección 27 era

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right).$$

Por lo tanto, el término $(1/r)(\partial h/\partial r)$ se obtiene por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left(\frac{-2S}{4Tt} \right).$$

Al contestar a la pregunta de la Sección 5, vimos que la expresión para $\partial^2 h / \partial r^2$ era

Con.—20⁺

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{V}{4\pi Tt} \left\{ e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2S}{4Tt} \right) + \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \right\}.$$

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones se obtiene para

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r},$$

al combinar las dos expresiones presentadas arriba, después de factorizar

$$\frac{V}{4\pi Tt} \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)}?$$

Pase a la Sección

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left\{ \frac{-S}{Tt} + \frac{S^2 r^2}{4T^2 t^2} \right\} \quad 21$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left\{ \frac{-2S}{4Tt} + \frac{2S^2 r^2}{16T^2 t^2} \right\} \quad 17$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left\{ \frac{-4S}{Tt} + \frac{S^2 r^2}{8Tt} \right\} \quad 24$$

Su respuesta en la Sección 20,

21⁺

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left\{ \frac{-S}{Tt} + \frac{S^2 r^2}{4T^2 t^2} \right\},$$

es correcta. Observe ahora que esta expresión es idéntica a la presentada para $(S/T) (\partial h / \partial t)$ en la Sección 20. Hemos demostrado que si la carga es

$$h = \frac{V}{4\pi Tt} \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)},$$

entonces es cierto que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

21+ — Con.

En otras palabras, la expresión

$$h = \frac{V}{4\pi T t} e^{-(Sr^2/4Tt)}$$

satisface la ecuación diferencial parcial o constituye una solución particular a la misma. En efecto, esta expresión es la solución que describe la carga hidráulica en un acuífero artesiano isotrópico, homogéneo, infinito y horizontal, después que un volumen finito de agua haya sido inyectado repentinamente cuando $t=0$ en un pozo de penetración completa con un radio infinitesimal localizado a $r=0$. Se asume que antes de la inyección la carga tenía en todas partes el valor del nivel de referencia—es decir, se asume que h era cero para todos los puntos previos a $t=0$.

Para demostrar que esta función es la solución que corresponde al problema, se requiere además de demostrar que satisface la ecuación diferencial, prueba que también satisface las diferentes condiciones límites propias del problema. Deseamos ahora formular estas condiciones.

La recarga del fluido se añade al pozo en el instante $t=0$. En este momento, el fluido no tiene tiempo suficiente para alejarse del pozo, hacia el acuífero. Por lo tanto, en todos los puntos en el acuífero excepto en el pozo (es decir, excepto para $r=0$), la carga cuando $t=0$ deberá

aún ser cero. En el pozo, por otra parte, el aumento del volumen de agua, produce una elevación instantánea en la carga. Para un pozo de radio mensurable, este aumento instantáneo de carga producido Δh , sería obtenido por

$$\Delta h = \frac{V}{A_w} = \frac{V}{\pi r_w^2},$$

donde A_w es la sección del interior del pozo y r_w es el radio del pozo. Por ejemplo, si A_w es un pie cuadrado e inyectamos un pie cúbico de agua, deberíamos observar una elevación instantánea de carga de 1 pie en el pozo; y como la carga era originalmente cero (nivel de referencia), podemos decir que la carga en el pozo cuando $t=0$ debe ser 1 pie. Si A fuese igual a 0.5 pies cuadrados, la carga en el pozo cuando $t=0$ deberá ser 2 pies; y así sucesivamente.

PREGUNTA

Con el propósito de desarrollar las condiciones límites, hemos asumido que el radio de nuestro pozo es infinitésimamente pequeño—es decir, que se aproxima a cero. ¿Cuál de las siguientes expresiones describe el comportamiento de la carga en el pozo cuando $t=0$, sujeto a esta hipótesis?

Pase a la Sección

| | |
|---|----|
| La carga en el pozo será 0 pies para $t=0$ | 10 |
| La carga en el pozo será 1 pie para $t=0$ | 19 |
| La carga en el pozo será inmensurablemente grande—es decir, infinita—para $t=0$ | 18 |

22+

Su respuesta en la Sección 37 es incorrecta. La expresión obtenida en la Sección 28 para el flujo de entrada menos el flujo de salida es

$$Q_1 - Q_2 = 2\pi T \left\{ r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{\partial h}{\partial r} \right\} \Delta r.$$

Nuestra expresión para dV/dt era

$$\frac{dV}{dt} = S 2\pi r \Delta r \frac{\partial h}{\partial t}.$$

La expresión para el flujo de entrada menos el de salida puede ser igualada a aquella expresión que representa dV/dt , simplificando el resultado para obtener la respuesta correcta.

Regrese a la Sección 37 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 5,

23+

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{V}{4\pi Tt} \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)} \left(\frac{-2S}{4Tt} \right) + \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right),$$

es incorrecta. La regla para la diferenciación de un producto es: el primer factor multiplicado por la derivada del segundo más el segundo factor por la derivada del primero. Los dos factores en este caso, son

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)}$$

(los cuales ya hemos diferenciado en la pregunta de la Sección 27) y

$$\frac{-2Sr}{4Tt}$$

El primer término de su respuesta es correcto; el primer factor,

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)},$$

es multiplicado por la derivada del segundo, el cual es

$$\frac{-2S}{4Tt}$$

(t se considera simplemente como parte del coeficiente constante de r , debido a que estamos diferenciando con respecto a r). Sin embargo, el segundo término de su respuesta es incorrecto; usted ha escrito la derivada del primer factor como

$$e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right).$$

Compare la misma con la respuesta correcta a la pregunta de la Sección 27 y verá que no representa la derivada de

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(Sr^2/4Tt)}.$$

Regrese a la Sección 5 y elija otra respuesta.

24⁺

Su respuesta en la Sección 20,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi T t} e^{-(Sr^2/4Tt)} \left\{ \frac{-4S}{Tt} + \frac{S^2 r^2}{8Tt} \right\},$$

es incorrecta. Esta respuesta contiene errores algebraicos, tanto en la suma de los dos términos

$$\left(\frac{-2S}{4Tt} \right)$$

como en su multiplicación

$$\left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right).$$

Regrese a la Sección 20 y elija otra respuesta.

25⁺

Su respuesta en la Sección 15,

$$Q_1 - Q_2 = 2\pi T \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_2 - \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 \right\},$$

es incorrecta. La expresión para el flujo de entrada a través de la cara interior del cilindro se indicó como

$$Q_1 = -2\pi T \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_1.$$

Aplicando la Ley de Darcy en una forma similar a la cara exterior del cilindro para un radio r_2 , la expresión para el flujo de salida a través de esta cara, se expresa como

$$Q_2 = -2\pi T \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_2.$$

Estas dos ecuaciones pueden ser sustraídas para obtener una expresión para el flujo de entrada menos el de salida. El radio, r , no desaparece del resultado. Por lo tanto, su respuesta, que no incluye el radio, es errónea.

Regrese a la Sección 15 y elija otra respuesta.

26⁺

Su respuesta en la Sección 7,

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)}{\partial r} = r \frac{\partial \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial r} \cdot r,$$

es incorrecta. La derivada de un producto se obtiene por el primer factor multiplicado por la derivada del segundo factor más el segundo por la derivada del primero. Su primer término en la ecuación anterior es correcto; el primer factor, r , se multiplica por la derivada de $\partial h / \partial r$, aunque sería más corriente usar la notación de la segunda derivada,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2},$$

en vez de

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

Con.—26⁺

Su segundo término, sin embargo, es incorrecto. La derivada de r con respecto a r no es igual a r . Regrese a la Sección 7 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 37 es correcta. La ecuación diferencial básica para el problema es

27⁺

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Al buscar la solución a este problema, intentamos encontrar una expresión que produzca h como una función de r y t , con tal que cuando $\partial h/\partial r$, $\partial^2 h/\partial r^2$, y $\partial h/\partial t$ sean obtenidos por diferenciación y sustituidos en esta ecuación, la ecuación resulte ser la solución. Por ejemplo, consideremos la función

$$h = \frac{V}{4\pi T t} \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)},$$

en la cual V (tanto como S y T) es constante y e es la base del logaritmo natural. Luego veremos que esta es una función importante en la teoría de hidráulica de pozos. Ahora, deseamos comprobar si satisface la ecuación diferencial mencionada anteriormente. Para lograr esto debemos diferenciar la expresión una vez con respecto a t y dos veces con respecto a r ; estas operaciones no son difíciles si las reglas de diferenciación se aplican cuidadosamente. Primero, diferenciamos con respecto a r , para lo cual, consideramos t como una constante, así que el factor $V/(4\pi T t)$ pasa a ser simplemente un

coeficiente constante. Tanto en el exponente como en el término $-(S/4Tt)$ se puede considerar como un coeficiente constante de r^2 ; entonces, el problema es esencialmente encontrar la derivada de $e^{-(S/4Tt)r^2}$ y multiplicar su resultado por el factor constante, $V/(4\pi T t)$. La derivada de una función e^u con respecto a la variable r es simplemente $e^u \cdot (du/dr)$. Aquí, u es el término $-(S/4Tt)r^2$.

PREGUNTA

Siguiendo el procedimiento delineado anteriormente, ¿cuál de las siguientes expresiones se aplica a $\partial h/\partial r$?

Pase a la Sección

$$\frac{\partial h}{\partial r} = e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \quad 4$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi T t} e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \quad 5$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{V}{4\pi T t} e^{-(Sr^2/4Tt)} \quad 2$$

Su respuesta en la Sección 7,

28⁺

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)}{\partial r} = r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{\partial h}{\partial r},$$

es correcta. Nuestra expresión para

$$\left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_2 - \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_1$$

puede por lo tanto ser escrita

$$\begin{aligned} & \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_2 - \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 \\ &= \frac{\partial \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)}{\partial r} \Delta r = \left\{ r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{\partial h}{\partial r} \right\} \Delta r. \end{aligned}$$

28⁺ — Con.

Nuestra expresión para el flujo de entrada menos el de salida pasa a ser entonces

$$Q_1 - Q_2 = 2\pi T \left\{ \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_2 - \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 \right\}$$

$$= 2\pi T \left\{ r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{\partial h}{\partial r} \right\} \Delta r.$$

Como antes, deseamos igualar esta expresión para el flujo de entrada menos el de salida a la rapidez de acumulación de agua almacenada en nuestro elemento. El área superficial del elemento cilíndrico se obtiene aproximadamente por

$$A = 2\pi r \Delta r.$$

El término $2\pi r$ es el perímetro de un círculo tomado a lo largo del radio medio del elemento; multiplicado por el ancho del radio, Δr produce

el área superficial o área de base, de la capa cilíndrica.

PREGUNTA

Utilizando esta expresión para el área superficial del elemento cilíndrico, y haciendo que $\partial h / \partial t$ represente la acumulación de carga respecto al tiempo en el elemento, ¿cuál de las siguientes expresiones se obtiene para la rapidez de acumulación de agua en el almacenamiento en el elemento?

Pase a la Sección

$$\frac{dV}{dt} = S 2\pi r \Delta r \frac{\partial h}{\partial t} \quad 37$$

$$\frac{dV}{dt} = S \pi r^2 \frac{\partial h}{\partial t} \quad 12$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{S \frac{\partial h}{\partial t}}{2\pi r \Delta r} \quad 16$$

29⁺

Su respuesta en la Sección 18 es incorrecta. El comportamiento que tratamos de describir es la desaparición del efecto de la inyección de

agua, a una distancia radial grande del pozo. La respuesta que eligió describe la carga, h , como si tendiese al infinito, en vez de desaparecer; así como describe una restricción sobre h con tiempo en vez de distancia.

Regrese a la Sección 18 y elija otra respuesta.

30⁺

Su respuesta en la Sección 15,

$$Q_1 - Q_2 = 2\pi T \left\{ \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_1 \cdot \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_2 \right\},$$

es incorrecta. Establecimos en las Secciones 1 y 15 que el flujo de entrada a través de la cara interior cilíndrica del elemento se obtiene por la Ley de Darcy como

$$Q_1 = -2\pi T \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_1.$$

Utilizando una aproximación similar, podemos demostrar que el flujo de salida a través de la cara exterior cilíndrica del elemento se obtiene por

$$Q_2 = 2\pi T \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)_2.$$

Estas dos ecuaciones pueden ser sustraídas para obtener una expresión para el flujo de entrada menos el de salida para el elemento cilíndrico.

Regrese a la Sección 15 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 35,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{V}{4\pi T t} \cdot \frac{S r^2}{4 T t^2} + e^{-(S r^2/4 T t)} \cdot \left(\frac{-V}{4\pi T t^2} \right),$$

es incorrecta. Aplicando la regla del producto -el primer factor multiplicado por la derivada del segundo más el segundo por la derivada del primero- es correcta; pero su expresión para la derivada del tiempo de $e^{-(S r^2/4 T t)}$ es incorrecta. Recuerde que la derivada de una exponencial, e^u ,

con respecto a t se obtiene por $e^u du/dt$. Si u representara $-(S r^2/4 T t)$, su respuesta sería $\partial u/\partial t$ en lugar de ser

$$e^u \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Regrese a la Sección 35 y elija otra respuesta.

31+

Su respuesta en la Sección 37 es incorrecta. En la Sección 28, vimos que la expresión para flujo de entrada menos el de salida puede escribirse

$$Q_1 - Q_2 = 2\pi T \left\{ r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{\partial h}{\partial r} \right\} \Delta r,$$

mientras que la expresión obtenida para dV/dt era

$$\frac{dV}{dt} = S 2\pi r \Delta r \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Si igualamos los términos

$$2\pi T \left\{ r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{\partial h}{\partial r} \right\} \Delta r$$

$$S 2\pi r \Delta r \frac{\partial h}{\partial t}$$

y

y dividimos la ecuación resultante entre

$$2\pi T r \Delta r,$$

obtenemos la respuesta correcta a la ecuación de la Sección 37.

Regrese a la Sección 37 y elija otra respuesta.

32+

Su respuesta en la Sección 18, $h \rightarrow 0$ a medida que $r \rightarrow \infty$ es correcta. Desde un punto de vista matemático, tal vez deberíamos haber usado la condición $(\partial h/\partial r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Esta condición es requerida cuando r aumenta hacia el infinito, porque el área seccional de flujo dentro del acuífero- un área cilíndrica coaxial con el pozo- se expande hacia el infinito. Por lo tanto, si tuviésemos que aplicar la Ley de Darcy para determinar el flujo del agua inyectada alejándose del pozo, obtenríamos como resultado que este flujo aumenta hacia un valor infinito a mayor distancia del pozo, excepto en el caso en que la gradiente de carga, $\partial h/\partial r$, decrece hacia cero con un aumento de r . Sin embargo, la condición que h se aproxima a una constante, cero, para $r \rightarrow \infty$ implica que $\partial h/\partial r$ debe también tender a cero a medida que r aumenta; la cual es una condición más fácil de establecer.

Nuestra intención, entonces, es mostrar que la función

$$\frac{V}{4\pi T t} e^{-(r^2 S/4 T t)}$$

satisface esta condición; es decir, debemos examinar esta función para ver si este valor tiende a cero cuando r tiende al infinito. Es fácil mostrar que para cualquier valor finito de tiempo la condición se satisface. También estamos interesados en investigar qué sucede cuando ambos t y r tienden al infinito al igual que r -es decir, deseáramos que nuestra condición se satisfaga para cualquier tiempo, aún para aquellos inmensurablemente grandes. Por esta

33+

33⁺ — Con.

razón, es conveniente utilizar el método de expansión de series dado en la Sección 18; es decir utilizar

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(r^2 S/4Tt)} = \frac{V}{4\pi Tt + r^2 S\pi + \frac{r^4 S^2 \pi}{4Tt \cdot 2!} + \frac{r^6 S^3 \pi}{16T^2 t^2 \cdot 3!} \cdot}$$

Para que la fracción en el término de la derecha tienda a cero, es suficiente que cualquiera de los términos individuales en el denominador sea infinito. Si r y t tienden al infinito, los dos primeros términos se aproximarán claramente al infinito; en efecto, los términos restantes llegarán a ser infinitos también, aunque esto no es lo que nos interesa demostrar. Si un término es infinito, todo el denominador es infinito, y la fracción es cero. Para un valor finito de t , todos los términos excepto el primero llegan a ser infinitos cuando $r \rightarrow \infty$, y nuevamente la expresión total tiende a cero. Por lo tanto,

$$\frac{V}{4\pi Tt} e^{-(r^2 S/4Tt)}$$

satisface la condición de aproximación a cero, cuando $r \rightarrow \infty$, para cualquier valor de tiempo. Esta situación se puede demostrar al extender los gráficos presentados en la Sección 18 para valores grandes de r .

Podríamos también incluir la condición que h debe tender a cero cuando t tiende a infinito en cualquier punto del acuífero —es decir, que el efecto de la inyección debe eventualmente desaparecer con el tiempo en cualquier punto del acuífero, debido a que inyectamos un volumen finito de agua dentro del mismo, el cual se considera de extensión infinita. Hemos observado que h tiende a cero para un valor infinito de tiempo cuando r llega también a ser infinito; necesitamos mostrar que este comportamiento se presenta cuando r es finito; mostraremos esta situación utilizando directamente la función, aunque también es evidente utilizando la forma

de expansión de series. Cuando t llega a ser infinitamente grande el factor

$$\frac{V}{4\pi Tt},$$

deberá tender a cero; el factor

$$- e^{-(r^2 S/4Tt)},$$

el cual es equivalente a

$$\frac{1}{e^{(r^2 S/4Tt)}}$$

debe tender al valor

$$\frac{1}{e^{r^2 S/\infty}}$$

ó

$$\frac{1}{e^0},$$

si r es finito. Pero e^0 es simplemente 1, así que el producto

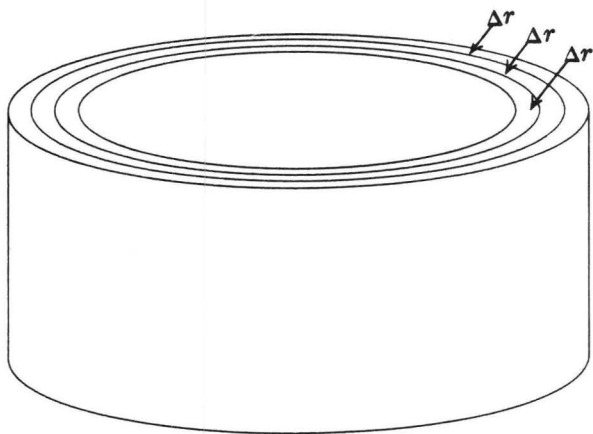
$$\frac{V}{4\pi Tt} \cdot e^{-(r^2 S/4Tt)}$$

debe tender a cero, cuando t es infinitamente grande, para cualquier valor de r .

Ahora, consideraremos la última condición que nuestra función debe satisfacer. En la figura, el acuífero se ha dividido en elementos cilíndricos de ancho radial Δr , coaxial al pozo. A cualquier tiempo, t , después de la inyección, el volumen del fluido inyectado, V , es distribuido en alguna forma entre estos elementos cilíndricos. Asumimos que la carga es cero antes de la inyección, así que h realmente representa sólo el aumento de carga debido a la inyección. De la definición del coeficiente de almacenamiento, la cantidad de fluido inyectado contenido dentro de un elemento cilíndrico particular será obtenido por

$$\Delta V = S \cdot h_{r,t} \cdot 2\pi r \Delta r,$$

donde r es la media del radio del elemento, así que, $2\pi r \Delta r$ es el área base del elemento; $h_{r,t}$ nos da la carga promedio (es decir, para un radio r) para un tiempo en consideración; y S es el coeficiente de almacenamiento. (Recuerde la definición del coeficiente de almacenamiento-el



volumen en almacenamiento es el producto del coeficiente de almacenamiento, carga y área de la base). Ahora, si sumamos los volúmenes de almacenamiento en cada elemento cilíndrico en el acuífero, el total tendrá que ser igual al volumen de agua inyectada V , en cualquier tiempo después de la inyección. Es decir,

$$V = \Sigma \Delta V = \Sigma S \cdot h_{r,t} \cdot 2\pi r \Delta r,$$

donde la suma se efectúa para todos los elementos cilíndricos en el acuífero. Otra vez reiteramos que se debe tener en cuenta que $h_{r,t}$ representa solamente el aumento de carga asociado con la inyección, así que su utilización en la ecuación de almacenamiento nos conduce únicamente al volumen del agua inyectada, no al volumen total en almacenamiento. Ahora, debido a que estamos considerando un sistema continuo, reemplazamos la suma de la ecuación anterior por una integración. Es decir, hacemos que el ancho de cada elemento sea infinitésimamente pequeño, denominado como dr , así que el número de elementos llega a ser infinitésimamente grande; entonces reformulamos la ecuación así

$$V = \int_{r=0}^{r=\infty} S \cdot h_{r,t} \cdot 2\pi r dr.$$

Los límites de integración se extienden de $r=0$ a $r=\infty$, indicando que los elementos cilíndricos se

Con.—33⁺

extienden por todo el acuífero. Esta ecuación, entonces, es la condición final que nuestra función debe satisfacer, si es en efecto la solución que se requiere.

PREGUNTA

¿Cómo cree que nuestra solución propuesta puede ser comprobada para ver si satisface la condición límite?

Pase a la Sección

La integración indicada en la ecuación deberá efectuarse. El resultado deberá ser igual a

$$\frac{V}{4\pi T t} e^{-(r^2 S/4Tt)}. \quad 11$$

La expresión

$$\frac{V}{4\pi T t} e^{-(r^2 S/4Tt)}$$

debe ser sustituida por

$$2\pi r$$

en la ecuación, y la integración efectuada; el resultado deberá ser

$$2\pi S. \quad 14$$

La expresión

$$\frac{V}{4\pi T t} e^{-(r^2 S/4Tt)}$$

debe ser sustituida por

$$h_{r,t}$$

en la ecuación, y la integración efectuada; el resultado deberá ser igual a

$$V. \quad 13$$

34⁺

Su respuesta en la Sección 1,

$$Q_1 = -K\pi r_1^2 \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_1,$$

es incorrecta. La Ley de Darcy expresa que el flujo se presenta como el producto de la conductividad hidráulica, la gradiente de carga en la

dirección del flujo y el área normal a la dirección del flujo. En este problema como en el del flujo continuo a un pozo considerado en la Parte III, la dirección del flujo es la dirección radial r . Un área que en cualquier punto es perpendicular a la coordenada radial será un área cilíndrica, coaxial al pozo. Es decir, el área de flujo requerida es cilíndrica -en particular, la cara interior del prisma cilíndrico mostrado en la Sección 1. El área del cilindro se obtiene por el producto de su altura por su perímetro.

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

35⁺

Su respuesta en la Sección 5,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{V}{4\pi T t} \left\{ e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2S}{4Tt} \right) + \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-2Sr}{4Tt} \right) \right\},$$

es correcta. Deseamos ahora diferenciar la ecuación

$$h = \frac{V}{4\pi T t} e^{-(Sr^2/4Tt)}$$

con respecto al tiempo, para obtener una expresión para $\partial h/\partial t$. Al hacerlo, consideramos r como una constante, y nuestra expresión como el producto de dos funciones de t ,

$$\frac{V}{4\pi T t}$$

y

$$e^{-(Sr^2/4Tt)}.$$

La derivada de

$$\frac{V}{4\pi T t}, \text{ ó } \frac{V}{4\pi T} \cdot t^{-1}.$$

con respecto a t es

$$-\frac{V}{4\pi T} \cdot t^{-2}, \text{ ó } -\frac{V}{4\pi T t^2}.$$

Para diferenciar

$$e^{-(Sr^2/4Tt)},$$

aplicamos entonces

$$\frac{de^u}{dt} = e^u \frac{du}{dt},$$

donde u es

$$\frac{-Sr^2}{4Tt}, \text{ ó } \frac{-Sr^2}{4T} \cdot t^{-1},$$

y su derivada con respecto a t es

Con.—35⁺

$$\frac{Sr^2}{4T} \cdot t^{-2}, \text{ ó } \frac{Sr^2}{4Tt^2}.$$

PREGUNTA

Aplicando la regla de diferenciación para un producto, junto a los resultados anteriores, ¿cuál de las siguientes expresiones se obtiene para $\partial h / \partial t$?

Pase a la sección

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{V}{4\pi Tt} \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{Sr^2}{4Tt^2} \right) \quad 3$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{V}{4\pi Tt} \cdot e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{Sr^2}{4Tt^2} \right) + e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-V}{4\pi Tt^2} \right) \quad 20$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{V}{4\pi Tt} \cdot \frac{Sr^2}{4Tt^2} + e^{-(Sr^2/4Tt)} \cdot \left(\frac{-V}{4\pi Tt^2} \right) \quad 31$$

Su respuesta en la Sección 1,

36⁺

$$Q_1 = \frac{-Kb \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_1}{2\pi r_1},$$

es incorrecta. La Ley de Darcy nos dice que el flujo se obtiene por el producto de la conductividad hidráulica, la gradiente de carga en la dirección del flujo y el área de sección transversal perpendicular a la dirección del flujo. En este caso, como en el de flujo continuo a un pozo en la Parte III, la dirección de flujo es radial y la sec-

ción normal al flujo es una superficie cilíndrica -la superficie interior de la capa cilíndrica mostrada en la Sección 1. Sin embargo, en su respuesta no hay ningún factor que representa el área de esta superficie. La altura de este cilindro, b , aparece en el numerador de su respuesta; su perímetro $2\pi r$, aparece en el denominador de su respuesta.

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

37⁺

presión anterior para la proporción de acumulación en el almacenamiento, ¿cuál de las siguientes ecuaciones se puede obtener?

Su respuesta en la Sección 28,

Pase a la Sección

$$\frac{dV}{dt} = S 2\pi r \Delta r \frac{\partial h}{\partial t},$$

es correcta. Como antes, ahora utilizaremos la ecuación de continuidad para relacionar el almacenamiento con las ecuaciones de flujo.

PREGUNTA

Si la expresión obtenida para el flujo de entrada menos el de salida es igualada a la ex-

$$r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial h}{\partial r} = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad 22$$

$$2\pi T \Delta r \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{\partial h}{\partial r} \right\} = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad 32$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad 27$$

Desarrollo De Soluciones Adicionales Por Superposición

La ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t},$$

es lineal en h ; es decir, h y las varias derivadas de h se presentan únicamente en la primera potencia—no están elevadas al cuadrado, al cubo o a otra potencia excepto a 1, en cualquier término de la ecuación. Las ecuaciones de este tipo tienen como propiedad que las soluciones correspondientes a dos perturbaciones individuales pueden ser agrupadas para obtener una nueva solución que describa el efecto combinado de las dos alteraciones. A esto se denomina superposición de soluciones: Es una técnica usada a menudo intuitivamente por hidrólogos —por ejemplo, para calcular el descenso producido por varios pozos, al añadir descensos calculados para operaciones individuales.

La solución obtenida en la instrucción pro-

gramada anterior se desarrolló para una inyección del fluido para $t=0$. Si la inyección no ocurre cuando $t=0$, el término t en la solución es simplemente reemplazado por Δt , que es el intervalo entre el tiempo de la inyección y el instante en el cual la carga se mide. Por ejemplo, si la inyección se hace al tiempo t' y el cambio de carga debido a esta inyección es medido a un tiempo después t , el intervalo $t-t'$ se usa en la solución en lugar de t y obtenemos

$$h_{r,t} = \frac{V}{4\pi T(t-t')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t')}\right)}$$

Ahora, supongamos que ocurren dos inyecciones, una para t_1' y la segunda para t_2' y la carga es medida a un tiempo i después de ambas inyecciones. Utilizando la superposición, el cambio de carga debido a estas alteraciones es

$$h_{r,t} = \frac{V_1}{4\pi T(t-t_1')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t_1')}\right)} + \frac{V_2}{4\pi T(t-t_2')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t_2')}\right)}$$

donde V_1 es el volumen inyectado al instante t_1' y V_2 es el volumen inyectado al instante t_2' .

Si consideramos la extracción de un volumen de agua del pozo, en vez de inyectar, necesitamos solamente introducir un cambio de signo, tomando V negativo. Por ejemplo, si el extractor de agua es retirado cuando $t=t_1'$, el cambio de carga a un tiempo t , debido a esta

remoción es

$$h_{r,t} = \frac{-V_1}{4\pi T(t-t_1')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t_1')}\right)}$$

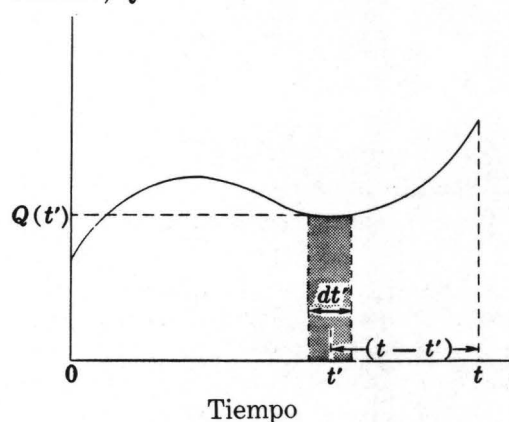
donde V_1 es el volumen sacado por el extractor. Si el pozo es sometido a extracciones repetidas, como puede suceder durante el desarrollo, la carga que cambia debido a la extracción se ob-

tiene por superposición de estas perturbaciones causadas por cada descarga individual:

$$h_{r,t} = \frac{-V_1}{4\pi T(t-t_1')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t_1')}\right)} - \frac{V_2}{4\pi T(t-t_2')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t_2')}\right)} - \frac{V_3}{4\pi T(t-t_3')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t_3')}\right)} \dots - \frac{V_n}{4\pi T(t-t_n')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t_n')}\right)},$$

donde t es el tiempo al cual h es medida; $t_1', t_2', t_3', \dots, t_n'$ son los tiempos a los cuales las descargas individuales se efectúan; y $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ son los volúmenes retirados por el extractor en las descargas sucesivas. El "método de extractor" para determinar la transmisibilidad a partir del descenso residual de un pozo que ha sido sometido a extracción, fue desarrollado de esta ecuación (Skibitzke, 1963).

Caudal de bombeo, Q



Ahora, supongamos que un pozo es bombeado continuamente durante el intervalo de tiempo de cero a t , y deseamos conocer el cambio de carga para el tiempo t debido a esta descarga

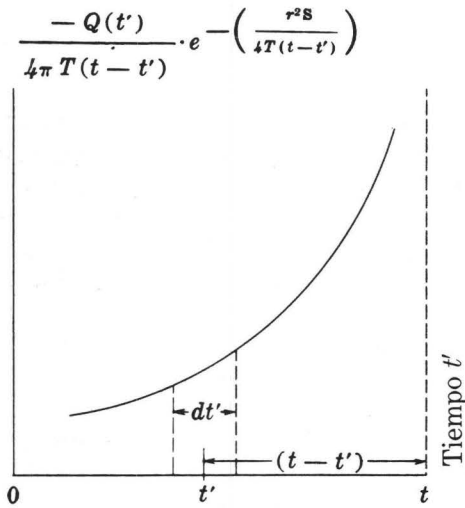
continua. La rapidez de bombeo, en unidades de volumen de agua por unidad de tiempo, puede variar de un instante a otro. La figura muestra un gráfico de la proporción de bombeo versus tiempo para un caso hipotético. El bombeo empieza en el instante $t=0$ y se extiende hasta el tiempo $= t$, que es el instante en el cual deseamos saber el cambio de carga. Consideramos primeramente, el cambio de carga al instante t debido a la acción de bombeo en un instante particular, t' durante el transcurso del bombeo. Consideramos un intervalo infinitésimo de tiempo, dt' , que se extiende a ambos lados del instante t' ; el valor promedio de bombeo durante este intervalo se denomina como $Q(t')$. El volumen de agua extraído del pozo durante el intervalo es el producto de la proporción de bombeo, $Q(t')$, y el intervalo de tiempo, dt' , es decir

$$-V = -Q(t') dt'.$$

Nuevamente, los signos negativos se utilizan para indicar descarga en vez de inyección. El producto $Q(t')dt'$ es igual al área del elemento sombreado en el gráfico que se muestra anteriormente; la altura de este elemento es $Q(t')$ y su ancho es dt' . El intervalo de tiempo entre el instante de extracción y el instante en que se mide la carga es $t-t'$. Usando la solución obtenida en este programa para cambio de carga debido a descarga instantánea de un volumen de agua, el cambio de carga al instante t debido a la descarga t' se obtiene por

$$\frac{-V}{4\pi T(t-t')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t')}\right)} = \frac{-Q(t')dt'}{4\pi T(t-t')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t')}\right)}.$$

El cambio total de carga al instante t , debido a que la descarga continúa de cero a t , se obtiene por medio de la superposición añadiendo los cambios de carga causados por descargas instantáneas en todo el intervalo de cero a t .



La figura muestra un gráfico de la función entera en vez de mostrar sólo la descarga versus tiempo. Se dibuja la función

$$\frac{-Q(t')}{4\pi T(t-t')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t')}\right)}$$

versus tiempo. El área del elemento para t' es ahora

$$\frac{-Q(t')}{4\pi T(t-t')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t')}\right)} \cdot dt'$$

por lo tanto, su magnitud es igual al cambio de carga para t , causado por la descarga para t' . Si elementos de esta clase mostrados en la figura se construyen a lo largo del eje para el tiempo t desde cero hasta t , el área de cada elemento presentará el cambio de carga para t debido a la operación de bombeo durante el intervalo representado por el elemento: El cambio total de carga para t causado por todas las descargas instantáneas en todo el intervalo desde cero hasta t será igual a la suma de estas áreas, o al área total bajo la curva de cero a t . El área total es la integral de la función

$$\frac{-Q(t')}{4\pi T(t-t')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t')}\right)}$$

sobre el intervalo de cero a t ; es decir, el cambio total de carga se obtiene por

$$h = \int_{t'=0}^{t'=t} \frac{-Q(t')}{4\pi T(t-t')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t')}\right)} dt'.$$

Se debería observar que ahora usamos t' para indicar la *variable* tiempo o variable de integración, en vez de especificar un instante particular. La función a ser integrada contiene la diferencia $t-t'$, entre el límite superior de integración y la variable de integración. La evaluación de la integral producirá una función del límite superior, t y de r ; es decir, el cambio de carga debido al bombeo será especificado como una función de r y de t (el instante cuando se mide la carga).

Para el caso particular cuando el valor de la descarga es constante, Q , la ecuación integral puede ser transformada directamente a una forma apropiada para computación. Tenemos

$$h = \int_{t'=0}^{t'=t} \frac{-Q}{4\pi T(t-t')} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t')}\right)} dt'.$$

El término $-Q/4\pi T$ es una constante, y puede ser sacado de la integral

$$h = \frac{-Q}{4\pi T} \int_{t'=0}^{t'=t} \frac{1}{t-t'} \cdot e^{-\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t')}\right)} dt'.$$

Introducimos el cambio algebraico de la variable

$$\psi = \frac{r^2 S}{4T(t-t')}.$$

Diferenciamos esta expresión con respecto a t' , considerando t , como una constante; esto produce

$$\frac{d\psi}{dt'} = \frac{r^2 S \cdot 4T}{(4T(t-t'))^2} = \frac{r^2 S}{4T(t-t')} \cdot \frac{1}{t-t'}$$

$$= \frac{r^2 S}{4T(t-t')} \left\{ \frac{4T(t-t')}{r^2 S} \right\} = \frac{\psi^2}{r^2 S}.$$

Por lo tanto,

$$d\psi = \frac{\psi^2}{r^2 S} \cdot dt'$$

y

$$dt' = \frac{r^2 S}{4T} \frac{d\psi}{\psi^2}.$$

El valor de ψ que corresponde al límite superior de integración, $t'=t$, es

$$\psi_t = \frac{r^2 S}{4T(t-t)} = \infty.$$

Mientras, el valor ψ correspondiente al límite inferior de integración, $t'=0$ es

$$\psi_0 = \frac{r^2 S}{4T(t-0)} = \frac{r^2 S}{4Tt}.$$

Ahora, regresamos a nuestra ecuación integral y sustituimos ψ por

$$\frac{r^2 S}{4T(t-t')};$$

$$\frac{r^2 S}{4T} \cdot \frac{d\psi}{\psi^2}$$

por

$$dt';$$

y los valores así obtenidos para los límites de integración. Esto produce

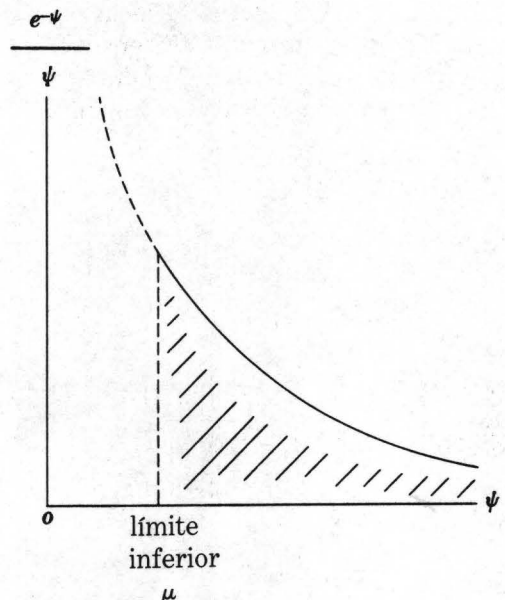
$$h = \frac{-Q}{4\pi T} \int_{\frac{r^2 S}{4Tt}}^{\infty} \frac{1}{t-t'} \cdot e^{-\psi} \cdot \frac{r^2 S}{4T} \cdot \frac{d\psi}{\psi^2}.$$

Pero como

$$\frac{1}{t-t'} \left(\frac{r^2 S}{4T} \right) = \psi,$$

la integral anterior pasa a ser

$$h = \frac{-Q}{4\pi T} \int_{\frac{r^2 S}{4Tt}}^{\infty} \frac{e^{-\psi}}{\psi} d\psi.$$



Esta integral se denomina la integral exponencial. Es una función de su límite inferior, como se sugiere en la figura, que muestra un gráfico de la función $e^{-\psi}/\psi$ versus ψ . El área debajo de la curva es igual al valor de la integral. El límite superior es infinito y la función $e^{-\psi}/\psi$ tiende a cero cuando ψ es infinito. El área debajo de la curva o el valor de la integral, depende únicamente del punto donde se tome el límite inferior -es decir, en el valor de $r^2S/4Tt$. Este término es a menudo denominado como u en la literatura, así que la ecuación para el cambio de carga se escribe a menudo

$$h = \frac{-Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-\psi}}{\psi} d\psi,$$

donde

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt}.$$

Se puede demostrar que la integral anterior es igual a una serie infinita, incluyendo el límite inferior. Específicamente,

$$\int_u^\infty \frac{e^{-\psi}}{\psi} d\psi = -0.5772 - \ln(u) + u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} - \frac{u^4}{4 \cdot 4!} + \dots$$

Los valores de la integral para varios valores del límite inferior se han computado, y tabulado usando esta serie. En literatura hidrológica, el valor de la integral se refiere comúnmente como $W(u)$ o "función pozo de u ". Tablas de $W(u)$ versus u están disponibles en la referencia de Ferris, Knowles, Brown y Stallman (1962) y muchas otras fuentes de referencia. En las formas presentadas anteriormente, las ecuaciones proporcionan el cambio de carga, o simplemente la carga, si se asume que h era cero antes del bombeo. Si la carga estaba en otro nivel constante, h_o , antes del bombeo, las expresiones serían aún válidas para el cambio de carga, $h - h_o$. Es decir, tenemos

$$h - h_o = \frac{-Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-\psi}}{\psi} d\psi = \frac{-Q}{4\pi T} \cdot W(u),$$

donde

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt},$$

o en términos de descenso, $h_o = h$, tenemos

$$s = h_o - h = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-\psi}}{\psi} d\psi = \frac{Q}{4\pi T} \cdot W(u).$$

El resultado que hemos obtenido aquí es conocido como la ecuación de Theis, en honor a C.V. Theis, quien aplicó esta ecuación por primera vez en hidrología (Theis, 1935). Un análisis excelente del significado de esta discusión en hidrología se presenta en otro trabajo de Theis (1938).

Fue reconocido por Cooper y Jacob (1946) que para valores pequeños de u , (es decir, para valores grandes de t), los términos que siguen a $\ln(u)$, en la serie expansiva para

$$\int_u^\infty \frac{e^{-\psi}}{\psi} d\psi$$

pasan a ser insignificantes. Bajo esta condición el valor de la integral resulta ser

$$-0.5772 - \ln(u)$$

ó

$$-0.5772 - \ln\left(\frac{r^2 S}{4Tt}\right).$$

El signo del término logarítmico puede ser cambiado invirtiendo la expresión en paréntesis,

$$-\ln\left(\frac{r^2 S}{4Tt}\right) = \ln\left(\frac{4Tt}{r^2 S}\right)$$

y la constante 0.5772, puede ser expresada como el logaritmo natural de otra constante,

$$0.5772 = \ln \left(\frac{4}{2.25} \right)$$

así que

$$\begin{aligned} -0.5772 - \ln \left(\frac{r^2 S}{4Tt} \right) &= \ln \left(\frac{4Tt}{r^2 S} \right) - \ln \left(\frac{4}{2.25} \right) \\ &= \ln \left(\frac{2.25Tt}{r^2 S} \right) = 2.3 \log_{10} \left(\frac{2.25Tt}{r^2 S} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando el bombeo continúa por un período de tiempo suficientemente largo de manera que u , o $r^2 S/4Tt$, sea pequeño, podremos escribir

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-\psi}}{\psi} d\psi \approx \frac{2.3Q}{4\pi T} \log_{10} \left(\frac{2.25 \cdot Tt}{r^2 S} \right).$$

Esta es la fórmula modificada de no-equilibrio, que forma la base de las técnicas para "gráficos semilog" a menudo usados por hidrólogos para el análisis de los datos de pruebas de bombeo. Estas técnicas son generalmente aplicadas para valores de u menores de 0.01.

La ecuación de Theis y la fórmula modificada de no-equilibrio son extremadamente útiles en la hidrología, siempre y cuando sean usadas dentro de los límites de aplicación establecidos para las suposiciones hechas en sus derivaciones. Antes de terminar con esta materia, repasaremos brevemente las suposiciones que han sido acumuladas durante el curso de la derivación. Primeramente desarrollamos la ecuación

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t},$$

asumiendo que:

1. El acuífero era confinado;
2. No había flujo vertical;
3. El flujo fue dirigido radialmente hacia (o desde) el origen
4. S y T eran constantes—es decir, el acuífero era homogéneo e isotrópico;

5. No había recarga al acuífero.

Al escribir la solución correspondiente a la descarga instantánea o aumento de un volumen de agua, V , incluimos las suposiciones que:

6. El acuífero era de infinita extensión;
7. No había descarga lateral o recarga excepto en el pozo;
8. La carga era uniforme y constante en todo el acuífero antes de $t=0$;
9. Toda el agua inyectada se almacenó (o inversamente, toda el agua descargada se extrajo del almacenamiento);
10. El pozo tenía un radio infinitesimal.

Finalmente, cuando integramos la solución anterior para obtener la solución de descarga continua

$$s = h_0 - h = \frac{Q}{4\pi T} \int_{\frac{r^2 S}{4Tt}}^\infty \frac{e^{-\psi}}{\psi} d\psi$$

incluimos la condición que

11. La descarga, Q , era constante durante todo el bombeo.

Estas suposiciones deben tomarse en cuenta cuando se aplica la ecuación de Theis. La condición que todo flujo es lateral, implica que el pozo debe penetrar totalmente al acuífero y que el acuífero es horizontal.

Si se usa la aproximación semilogarítmica, incluimos la condición que el tiempo es suficientemente grande y el radio suficientemente pequeño para que el término $r^2 S/4Tt$ sea menor

que 0.01 y que los últimos términos en la expresión de la serie para la integral no se tomen en cuenta.

La ecuación de Theis fue la primera ecuación que describió el flujo de agua a un pozo en condiciones de no-equilibrio. En trabajos subsecuentes, Papadopoulos y Cooper (1967) indicaron los efectos del radio infinito de un pozo; Jacob (1963) y varios otros escritores han examinado los problemas de descarga de pozos parcialmente penetrantes; Stallman (1963a), Lang (1963) y numerosos investigadores han utilizado la teoría de las imágenes para explicar los límites laterales de acuíferos; Jacob y Lohman

(1952) han analizado la descarga a descenso constante, en vez de caudal constante; numerosos escritores incluyendo en particular Jacob (1946), Hantush (1959, 1960, 1967a, 1967b), y Hantush y Jacob (1955) han analizado el problema de descarga de un acuífero recargado verticalmente a través de estratos supra e infrayacentes; varios escritores, incluyendo Boulton (1954), han enfocado el problema general de flujo tri-dimensional a una pozo. Weeks (1969) ha aplicado varios aspectos de la teoría del flujo hacia un pozo al problema de determinar permeabilidad vertical a partir de análisis de ensayos de bombeo.

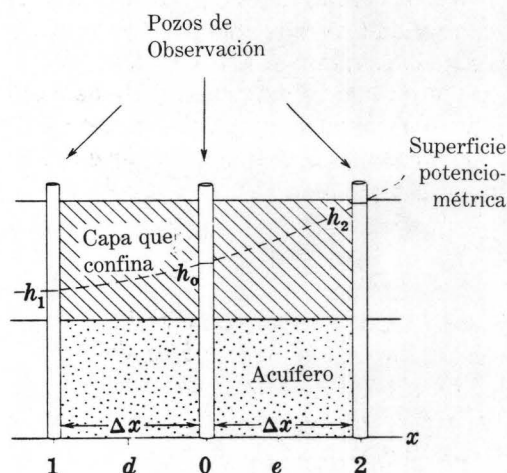
Parte VII. Métodos de Diferencias Finitas

Introducción

En los capítulos anteriores, consideramos soluciones matemáticas formales a las ecuaciones diferenciales para el flujo de aguas subterráneas. Sin embargo, en la práctica comprobamos que tales soluciones formales son aplicables solamente a algunos problemas de campo, representando condiciones límites relativamente simples. En la mayoría de los

casos, necesitamos buscar soluciones aproximadas utilizando métodos diferentes a las soluciones formales. En la Parte VII, consideramos uno de estos métodos – la simulación de las ecuaciones diferenciales por ecuaciones diferenciales finitas, las cuales pueden a su vez ser resueltas algebraica o numéricamente.

1□□



Tres pozos de observación penetran un acuífero confinado. Los pozos están ordenados en línea recta en la dirección del eje x y a una distancia uniforme Δx . El nivel de agua en los tres pozos se designa como h_1 , h_0 , y h_2 como se indica en la figura.

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa una aproximación razonable para la derivada $\partial h / \partial x$, en el punto, d , equidistante del pozo 1 y del pozo 0?

Pase a la Sección

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_d \approx \frac{h_1 - h_2}{\Delta x} \quad 7$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_d \approx \frac{h_2 - h_1}{2\Delta x} \quad 26$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_d \approx \frac{h_0 - h_1}{\Delta x} \quad 12$$

Su respuesta, $h_{i,j}$ en la Sección 3 es correcta.

2□□

PREGUNTA

Siguiendo las mismas reglas, ¿cuál de las siguientes expresiones podría servir como una aproximación diferencial finita para el término

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

en el punto $h_{i,j}$?

Pase a la Sección

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_{i-2,j} + h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i+2,j} - 4h_{i,j}}{a^2} \quad 20$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_{i,j+1} + h_{i+1,j} + h_{i,j+2} + h_{i+2,j} - 4h_0}{a^2} \quad 18$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - 4h_{i,j}}{a^2} \quad 4$$

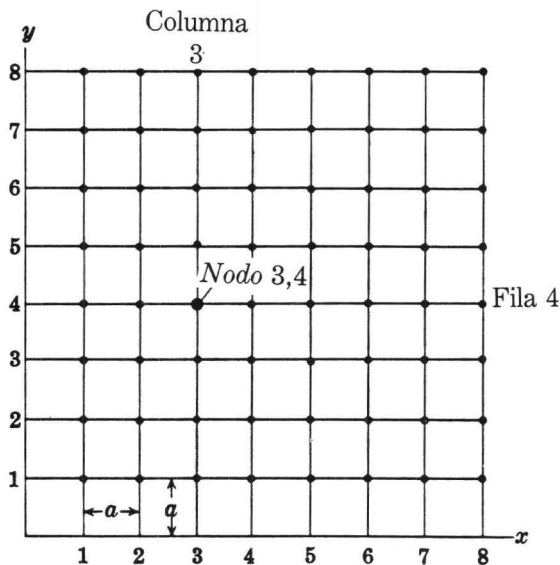
Su respuesta en la Sección 15,

3□□

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_1 - h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0}{a^2},$$

es correcta. Estas aproximaciones a $\partial^2 h / \partial x^2$ y $\partial^2 h / \partial y^2$ se pueden obtener más formalmente utilizando las series de expansión de Taylor. Al aproximar las derivadas usando diferencias finitas se comete un cierto error; generalmente, este error disminuye cuando los valores de a son cada vez más pequeños.

Construyamos una red rectangular de líneas entrecruzadas así como se indica en el diagrama, sobre el plano x, y .



Las líneas se trazan a distancia uniforme, a , y se numeran desde el origen en forma sucesiva. Las líneas paralelas a x se denominan filas y los trazos paralelos al eje y se denominan columnas. La intersección de ambos trazos se denomina nodo y se identifica con la numeración de la línea de intersección; por ejemplo, el nodo 3,4 está formado por la intersección de la tercera columna a la derecha del eje y con la cuarta fila sobre el eje x . La distancia, a , puede ser considerada como una unidad de medida; por lo tanto, los números nodales dan el número de unidades de distancia de un nodo particular a los ejes x e y . La carga en un nodo se indica por el uso de los números nodales como subíndices; por ejemplo, la carga en el nodo 3,4 se indica como $h_{3,4}$.

PREGUNTA

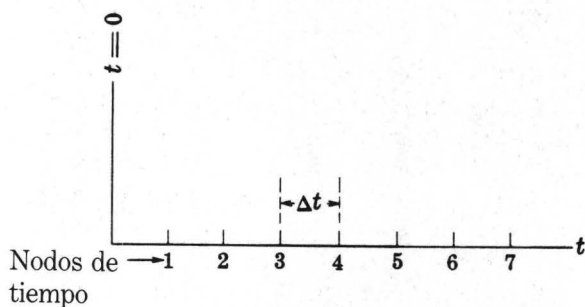
Siguiendo estas reglas, ¿cómo se indicaría la carga de un nodo ubicado a i unidades a la derecha del eje y y j unidades sobre el eje x (es decir, el punto $x = i \cdot a$, $y = j \cdot a$, en la notación Cartesiana convencional)?

Pase a la Sección

| | |
|-------------|----|
| $h_{j,i}$ | 14 |
| $h_{i,j}$ | 2 |
| $h_{ia,ja}$ | 5 |

4□□

Su respuesta en la Sección 2 es correcta. Consideramos, ahora, el eje de tiempo y lo dividimos en la forma como se muestra en la figura, en segmentos de longitud Δt , y numerando sucesivamente las divisiones desde $t=0$. Además, incluimos un tercer subíndice, que in-



dica el tiempo en el cual se observa el valor de una carga particular; por ejemplo $h_{i,j,n}$ se refiere a la carga en el nodo i, j en el plano x, y para el tiempo indicado por la división n marcada sobre el eje tiempo.

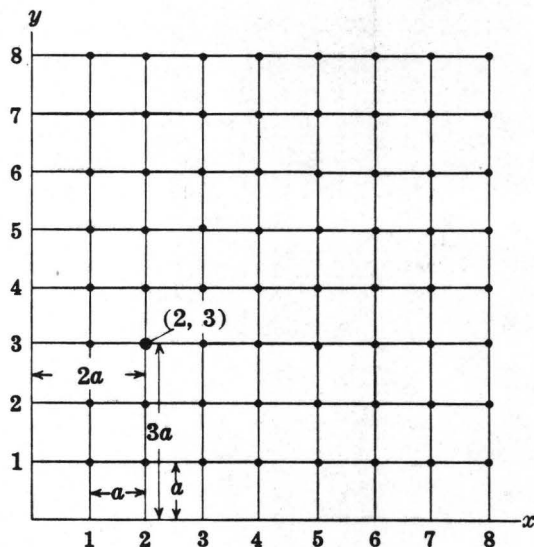
PREGUNTA

Suponiendo que $\Delta x = \Delta y = a$, ¿cuál de las siguientes expresiones daría las distancias coordenadas reales y el tiempo de medida asociado con el término $h_{i,j,n}$?

Pase a la Sección

- $h_{i,j,n}$ = carga en $x = i \cdot a$, $y = i \cdot \Delta t$, tiempo = $n \cdot \Delta t$ 9
- $h_{i,j,n}$ = carga en $x = i \cdot \Delta x$, $y = i \cdot \Delta y$, tiempo = $n \cdot a$ 23
- $h_{i,j,n}$ = carga en $x = i \cdot a$, $y = j \cdot a$, tiempo = $n \cdot \Delta t$ 10

5□□



Su respuesta, $h_{ia,ja}$, en la Sección 3 es incorrecta. Ha usado las distancias de los dos ejes coordenados como subíndices. Es decir, ha utilizado ia , el cual es en realidad la coordenada x del nodo, o su distancia del eje y como el primer subíndice. Además, ha usado ja , el cual es en realidad la coordenada y del nodo o su distancia al eje de las x , como segundo subíndice. La regla expresada en la Sección 3, no tiene esa forma. Si la red a diferencias finitas es sobrepuesta al plano x, y como se muestra en el gráfico, entonces el subíndice asociado al punto $x=2a$ y $y=3a$ es simplemente 2.3; la carga en este punto se designa como $h_{2.3}$. Si numeramos las líneas de la red en sucesión a lo largo de cada eje, con el punto de origen igual a cero, podemos obtener el subíndice de un nodo particular, o punto de intersección observando los números asignados a las dos líneas en la red que se interceptan allí. El punto 2.3 se encuentra en la intersección de la línea vertical número 2 y la línea horizontal número 3.

Regrese a la Sección 3 y elija otra respuesta.

6□□

Su respuesta en la Sección 25 es incorrecta.

Su planteamiento para el cálculo del nuevo valor de $h_{i,j}$ en el primer paso es incorrecto. La ecuación diferencial finita que hemos desarrollado expresa que el valor de $h_{i,j}$ debe ser el promedio de los valores de h en los cuatro nodos cercanos, es decir,

$$h_{i,j} = \frac{1}{4}(h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1}).$$

La intención en este proceso de relajamiento es computar un nuevo valor de $h_{i,j}$ como el promedio de los valores previos de h en los 4 nodos cercanos. Es decir,

$$h_{i,j} (\text{Nuevo Valor}) = \frac{1}{4}(h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1}) (\text{Valores Previos}).$$

Al efectuar este cálculo, el objetivo es comparar el nuevo valor de $h_{i,j}$ con el valor previo de

$h_{i,j}$. Si ambos, están cerca uno de otro, en cualquier punto de la red, no es necesario continuar con el proceso, debido a que iteraciones adicionales producirán muy pocos cambios adicionales. La solución, en otras palabras, converge para los valores de h la cual satisface la ecuación de diferencias. En el segundo paso, en vez de establecer $R_{i,j}$ igual al promedio de los valores nuevos y previos de $h_{i,j}$ como en la respuesta que eligió, $R_{i,j}$ debería ser igualada a la diferencia entre, $h_{i,j}$ (Nuevo Valor) y $h_{i,j}$ (Valor Previo). La diferencia puede ser entonces probada en la red y si es suficientemente pequeña en todos los puntos, el proceso de iteración puede darse por terminado.

Regrese a la Sección 25 y elija otra respuesta.

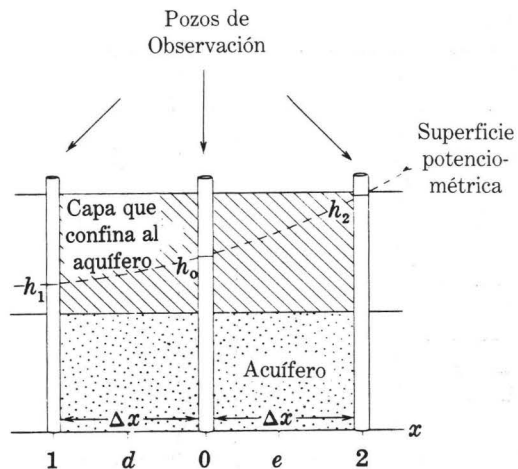
Su respuesta en la Sección 1,

$$\frac{h_1 - h_2}{\Delta x},$$

es incorrecta. Al introducir la noción de derivadas, es común empezar con la fórmula de diferencias finitas – es decir, considerar los cambios finitos en h , Δh , que ocurren en un intervalo finito, Δx , a lo largo del eje x . La notación de la derivada, dh/dx , es entonces incluida para representar el valor de la relación $\Delta h/\Delta x$, cuando Δx pasa a ser de tamaño infinitesimal. Aquí, la intención es desplazarse en la dirección opuesta. Comenzamos con la derivada, $\partial h/\partial x$, y queremos aproximar a la misma por una relación de diferencias finitas. Aún más, necesitamos una expresión que se aplica al punto d , equidistante del pozo 1. El cambio finito en h que sucede entre estos pozos es $h_0 - h_1$. La distancia finita que los separa es Δx .

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

7□□



8□□

Su respuesta en la Sección 10 es incorrecta. Ha usado la formulación correcta para la aproximación "forward difference" para $\partial h/\partial t$ —es decir,

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{h_{i,j,n+1} - h_{i,j,n}}{\Delta t}$$

—pero su aproximación para $(\partial^2 h/\partial x^2) + (\partial^2 h/\partial y^2)$ es incorrecta. Para obtener una aproximación para $\partial^2 h/\partial x^2$, nos desplazamos a lo largo del eje x manteniendo y como constante. En este proceso, el subíndice i que denota la posición nodal en el eje x cambiará, en cambio el subíndice j que denota posición nodal en el eje y permanecerá igual. Nuestro resultado será

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{h_{i+1,j,n} - h_{i,j,n}}{a} - \frac{h_{i,j,n} - h_{i-1,j,n}}{a}}{a} = \frac{h_{i+1,j,n} + h_{i-1,j,n} - 2h_{i,j,n}}{a^2}.$$

Similarmente, al obtener una aproximación para $\partial^2 h/\partial y^2$, nos desplazamos a lo largo del eje y , así que i permanecerá constante, mientras que y - j varía. El resultado es

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{\frac{h_{i,j+1,n} - h_{i,j,n}}{a} - \frac{h_{i,j,n} - h_{i,j-1,n}}{a}}{a} = \frac{h_{i,j+1,n} + h_{i,j-1,n} - 2h_{i,j,n}}{a^2}.$$

La suma de estas dos expresiones dará la aproximación correcta para $(\partial^2 h/\partial x^2) + (\partial^2 h/\partial y^2)$.

Regrese a la Sección 10 y elija otra respuesta.

9□□

Su respuesta en la Sección 4 es incorrecta. Los subíndices i, j, n nos indican que la carga $h_{i,j,n}$ existe en un nodo i, j de la red de diferencias finitas sobre el plano x e y en cierto punto n , en la escala de diferencias finitas a lo largo del eje de tiempo. Los valores de las coordenadas se encuentran multiplicando el número de nodos a lo largo de un eje específico multiplicado por la

distancia nodal. A lo largo del eje x el nodo i, j permanece a una distancia $i \cdot a$ del origen (un número de nodos, i , cada uno con distancia a). A lo largo del eje de tiempo, el punto n se presenta para el tiempo $n \cdot \Delta t$ (n registros de tiempo, cada uno a una distancia Δt). El mismo procedimiento se puede aplicar para determinar la coordenada y , teniendo en cuenta que hay nodos j a lo largo del eje y entre el origen y el punto i, j , además que estos nodos se encuentran separados por una distancia a .

Regrese a la Sección 4 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 4 es correcta. En cada eje x , y y t , el valor de la variable independiente se encuentra multiplicando el subíndice o número del nodo por su distancia a lo largo del eje. Por lo tanto, utilizando las reglas que hemos adoptado, la aproximación a

10□□

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

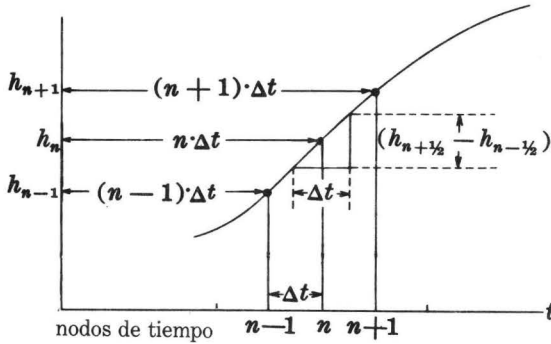
para el tiempo $t = n\Delta t$, y en el punto $x = i \cdot a$, $y = j \cdot a$ se obtendrá por

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)_{n\Delta t} \approx \frac{h_{i-1,j,n} + h_{i+1,j,n} + h_{i,j-1,n} + h_{i,j+1,n} - 4h_{i,j,n}}{a^2}.$$

Ahora, para simular la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

en el instante $t = n\Delta t$, requerimos además una aproximación a $\partial h / \partial t$ para este instante.



El gráfico muestra una curva de h versus t en la proximidades de este tiempo. Una aproximación razonable a $\partial h / \partial t$ proxima al tiempo h será obviamente

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{(n+1/2)} - h_{(n-1/2)}}{\Delta t}.$$

Sin embargo, en métodos prácticos de computación, las aproximaciones

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_{n\Delta t} \approx \frac{h_{n+1} - h_n}{\Delta t}$$

ó

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_{n\Delta t} \approx \frac{h_n - h_{n-1}}{\Delta t}$$

son a menudo más recomendables. Aquí, simulamos la derivada de $t = n\Delta t$ por una "forward difference" tomada entre los tiempos $n \cdot \Delta t$ y $(n+1) \cdot \Delta t$, y una "backward difference", tomada entre $(n-1) \cdot \Delta t$ y $n \cdot \Delta t$. El error encontrado dependerá en gran parte de la elección de Δt , y puede ser reducido a límites tolerables al escoger un valor muy pequeño para Δt .

PREGUNTA

Utilizando una aproximación "forward difference" para $\partial h / \partial t$ presentada anteriormente, ¿cuál de los siguientes resultados se obtiene como una simulación diferencial finita de la ecuación

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

para el punto $x = ia$, $y = ja$, y a un tiempo $t = n\Delta t$?

Pase a le Sección

$$\frac{h_{i-1,j,n} + h_{i+1,j,n} + h_{i,j-1,n} + h_{i,j+1,n} - 4h_{i,j,n}}{a^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{h_{i,j,n+1} - h_{i,j,n}}{\Delta t} \quad 16$$

$$\frac{h_{i-1,j-1,n} + h_{i+1,j+1,n} + h_{i+1,j-1,n} - h_{i-1,j+1,n} - 4h_{i,j,n}}{a^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{h_{i,j,n+1} - h_{i,j,n}}{\Delta t} \quad 8$$

$$\frac{h_{i-1,j,n} + h_{i+1,j,n} + h_{i,j-1,n} + h_{i,j+1,n} - 4h_{i,j,n}}{a^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{h_{i,j,n+1/2} - h_{i,j,n-1/2}}{\Delta t} \quad 19$$

11□□

Su respuesta en la Sección 16 es incorrecta. Para la condición de estado constante, $\partial h/\partial t = 0$; así nuestra ecuación

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

se simplifica a

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

Para obtener la aproximación diferencial finita de esta ecuación, necesitamos únicamente considerar nuestra aproximación diferencial finita para $(\partial^2 h/\partial x^2) + (\partial^2 h/\partial y^2)$ e igualarla a cero. La aproximación a esta suma, utilizando la notación de índices asociada a la red diferencial finita fue

$$\frac{h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - 4h_{i,j}}{\alpha^2}.$$

Esta expresión puede igualarse a cero y la ecuación resultante multiplicarse por la constante α^2 para obtener la ecuación diferencial finita que se requiere.

Regrese a la Sección 16 y elija otra respuesta.

12□□

Su respuesta en la Sección 1,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_d \approx \frac{h_0 - h_1}{\Delta x},$$

es correcta. En igual forma, la derivada en el punto e , equidistante del pozo 0 y del pozo 2 es aproximada por

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_e \approx \frac{h_2 - h_0}{\Delta x}.$$

PREGUNTA

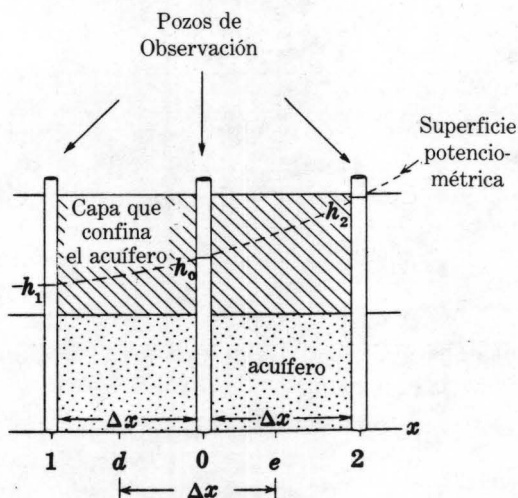
¿Cuál de las siguientes expresiones da una aproximación razonable para la segunda derivada, $\partial^2 h/\partial x^2$, en el punto 0, es decir, en la localización del pozo central?

Pase a la Sección

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h_2 - h_1}{2\Delta x} \quad 27$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h_1 + h_2 - 2h_0}{(\Delta x)^2} \quad 15$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{h_2 - h_0}{\Delta x} - \frac{h_0 - h_1}{\Delta x}}{2\Delta x} \quad 22$$



Su respuesta en la Sección 16 es incorrecta.
La expresión diferencial finita que aproxima a

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

era

$$\frac{h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - 4h_{i,j}}{a^2}$$

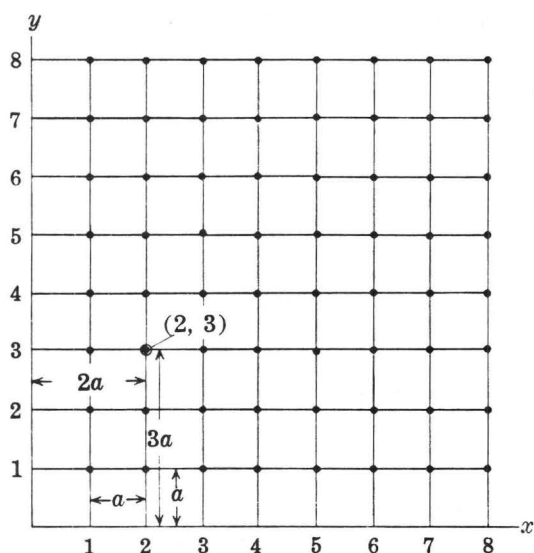
Para aproximarse a la ecuación

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0,$$

esta ecuación diferencial finita necesita únicamente igualarse a cero. La ecuación resultante puede multiplicarse por la constante a^2 .

Regrese a la Sección 16 y elija otra respuesta.

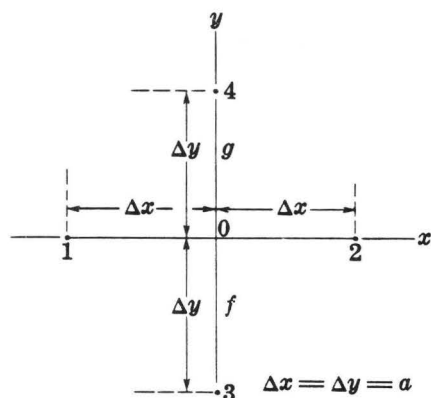
14□□



Su respuesta, $h_{j,i}$, en la Sección 3 es incorrecta. El esquema muestra un diagrama del plano x, y con la red diferencial finita superpuesta a la misma. El nodo 2,3 se encuentra a una distancia $2a$ del eje y ($x=2a$) y a una distancia $3a$ del eje x ($y=3a$). Es decir, el nodo con las coordenadas $x=2a, y=3a$, es el nodo 2, 3; y la carga de este nodo se designa como $h_{2,3}$. Las mismas reglas se aplican para el nodo de la pregunta en la Sección 3, que se encuentra a una distancia $i \cdot a$ del eje de las y y a una distancia $j \cdot a$ del eje de las x . Las coordenadas de este nodo son: $x=i \cdot a, y=j \cdot a$.

Regrese a la Sección 3 y elija otra respuesta.

Vista del plano



15□□

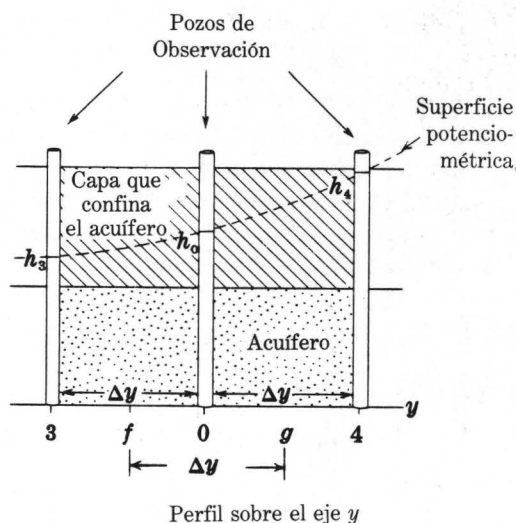
Su respuesta en la Sección 12,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h_1 + h_2 - 2h_0}{(\Delta x)^2},$$

es correcta. Si también consideramos los pozos 3 y 4 a lo largo de una línea paralela al eje de las y (ver figura), podríamos también tener como una aproximación para $\partial^2 h / \partial y^2$ en el punto 0,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_3 + h_4 - 2h_0}{(\Delta y)^2},$$

15□□ — Con.



PREGUNTA

Si la distancia de los pozos en el diagrama es uniforme, —es decir, si $\Delta x = \Delta y = a$ — ¿cuál de las siguientes expresiones se podría obtener para

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} ?$$

Pase a la Sección

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0}{a^2} \quad 3$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{a^2} \quad 28$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{(h_1 + h_2 - h_3 + h_4)}{a^2} \quad 24$$

16□□

Su respuesta en la Sección 10 es correcta.

Observe que la ecuación que hemos obtenido es en realidad una ecuación algebraica que incluye los términos $h_{i-1,j,n}$, $h_{i+1,j,n}$, $h_{i,j-1,n}$, $h_{i,j+1,n}$, $h_{i,j,n}$ y $h_{i,j,n+1}$; es decir, hemos simulado una ecuación

$$\frac{h_{i-1,j,0} + h_{i+1,j,0} + h_{i,j-1,0} + h_{i,j+1,0} - 4h_{i,j,0}}{a^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{h_{i,j,1} - h_{i,j,0}}{\Delta t}$$

Esta ecuación se aplica para cada nodo interno del plano y se resuelve para $h_{i,j,1}$ en cada punto, utilizando los valores apropiados de h desde $t=0$. Para determinar los valores de carga en los nodos a lo largo de los límites del plano x,y para un nuevo tiempo, más condiciones tienen que ser proporcionadas. Cuando los valores de carga se calculan en todo el plano para el nuevo tiempo ($n=1$), el procedimiento podría ser repetido para determinar los valores de carga para el siguiente punto sobre el eje de tiempo ($n=2$) y así sucesivamente.

Esta técnica se denomina el procedimiento de

diferencial por una ecuación algebraica. Si los valores de carga de todos los nodos son conocidos en el plano x, y para un tiempo inicial $t=0$, entonces el valor de carga de cada nodo interno para el tiempo subsiguiente, $t=1 \cdot \Delta t$, puede obtenerse al aplicar la ecuación recién obtenida para los tiempos 0 y $1 \cdot \Delta t$ ($n=0$ y $n=1$). Esto resultaría en

solución explícita. Tiene el inconveniente que si Δt se escoge demasiado grande, los errores cometidos pueden aumentar en dimensión, a medida que los cálculos prosiguen, así que para valores grandes de tiempo, la solución no contiene relación con la realidad, aún como una aproximación. Para evitar esta dificultad, se utilizan a menudo otros esquemas de computación, algunos incluyen la aproximación "backward difference" $\partial h / \partial t$, y otros incluyen simulaciones totalmente diferentes de la ecuación diferencial.

Muchos de estos esquemas de solución in-

cluyen técnicas de iteración, en las cuales las diferencias entre miembros de una ecuación son sucesivamente reducidas por ajustes numéricos. Estas técnicas son algunas veces denominadas métodos de relajamiento. Son lo suficientemente importantes, así que se mostrará su operación por medio de un ejemplo simple.

Supongamos que se trata de un problema de flujo bidimensional de aguas subterráneas en régimen permanente. Para esta situación, el término $\partial h / \partial t$ de nuestra ecuación diferencial, y por lo tanto el término

$$\frac{h_{i,j,n+1} - h_{i,j,n}}{\Delta t}$$

de nuestra ecuación diferencial finita es cero. La ecuación diferencial es simplemente

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

Con.—16□□

PREGUNTA

Utilizando la notación desarrollada anteriormente, suprimiendo el tercer subíndice, debido a que no se considera el tiempo, ¿cuál de las siguientes expresiones representa una aproximación diferencial finita válida a esta ecuación de estado permanente?

Pase a la Sección

$$h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - 4h_{i,j} = 0 \quad 25$$

$$h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} + 4h_{i,j} = a^2 \quad 11$$

$$h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} = \frac{4h_{i,j}}{a^2} \quad 13$$

Su respuesta en la Sección 25 es correcta. Si hacemos un esquema de la secuencia de operaciones del proceso de relajamiento para resolver en una computadora digital, tendríamos que incorporar de alguna manera estos pasos.

Existen otras técnicas para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales de flujo. La eficiencia de varios métodos, en términos de trabajo computacional o tiempo que usa la máquina, varía ampliamente según el problema en consideración. Se debe tener cuidado al elegir un método que reúna las condiciones que el problema requiere; así se evitará pérdidas de tiempo y esfuerzo para obtener la solución.

En este análisis, sólo proporcionamos una breve indicación sobre la forma en la cual los métodos numéricos pueden aplicarse en la hidrología de las aguas subterráneas. El análisis numérico es un campo amplio y complejo por sí mismo. Los lectores interesados encontrarán mucha literatura sobre la teoría y sus aplica-

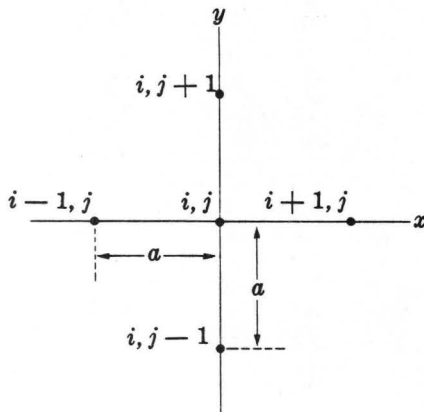
ciones. Ejemplos del uso de las técnicas numéricas en aguas subterráneas pueden encontrarse en los trabajos de Prickett y Lonquist (1971), Stallman (1956), Remson, Appel y Webster (1965), Pinder y Bredehoeft (1968), Rubin (1968), Bredehoeft y Pinder (1970), Freeze (1971), Prickett y Lonquist (1973), Trescott, Pinder y Jones (1970), Trescott (1973) y muchos otros autores. Un excelente sumario de los métodos numéricos aplicados a la hidrología de las aguas subterráneas se presenta por Remson, Hornberger y Molz, (1970).

Usted ha completado el programa de la Parte VII. A continuación de la Sección 28 se presenta en forma de texto un análisis que proporciona más detalles de alguna de las técnicas clásicas de ecuaciones de diferencias finitas.

17□□

18□□

Su respuesta en la Sección 2 es incorrecta. El gráfico muestra el arreglo de cinco pozos utilizados anteriormente para desarrollar una



aproximación para $(\partial^2 h / \partial x^2) + (\partial^2 h / \partial y^2)$, pero con los pozos ahora reordenados de acuerdo al esquema de subíndices asociados con la red diferencial finita. La carga en el pozo central es designada como $h_{i,j}$ en vez de h_0 ; las cargas de los dos pozos a lo largo del eje x son $h_{i-1,j}$ y $h_{i+1,j}$, en vez de h_1 y h_2 ; y las cargas para los dos pozos a lo largo del eje y son $h_{i,j-1}$ y $h_{i,j+1}$, en vez de h_3 y h_4 . Nuestra expresión previa para

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

fue

$$\frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0}{a^2}.$$

La pregunta requiere solamente el cambio an la notación asociada con la red diferencial finita.

Regrese a la Sección 2 y elija otra respuesta.

19□□

Su respuesta en la Sección 10 es incorrecta. Su aproximación para $(\partial^2 h / \partial x^2) + (\partial^2 h / \partial y^2)$ es correcta, pero usted no ha utilizado la formulación para "forward difference" para aproximar $\partial h / \partial t$, como requiere la pregunta. La aproximación que ha utilizado

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i,j,n+1/2} - h_{i,j,n-1/2}}{\Delta t},$$

es normalmente una aproximación más exacta

para $\partial h / \partial t$, a i, j, n que la formulación "forward difference", debido a que la diferencia se toma simétricamente en el punto en donde $\partial h / \partial t$ es aproximada. Desafortunadamente, no es siempre útil para el cálculo de soluciones numéricas como son las formulaciones "forward difference" ó "backward difference". Estas formulaciones son asimétricas en el sentido en que la diferencial se mide enteramente a un lado u otro del tiempo $t = n\Delta t$, que representa el instante en que $\partial h / \partial t$ debe ser aproximada. Sin embargo, estas formulaciones son más adecuadas para usar con muchas otras técnicas de computación.

Regrese a la Sección 10 y elija otra respuesta.

20□□

Su respuesta en la Sección 2 es incorrecta. La parte superior de la figura muestra el ordenamiento utilizado para desarrollar las aproximaciones de diferencias finitas para $(\partial^2 h / \partial x^2) + (\partial^2 h / \partial y^2)$. El pozo al centro del

ordenamiento se designó como 0 y los pozos vecinos se denominaron como indica la figura. La expresión que obtuvimos para

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

fue

$$\frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0}{a^2}.$$

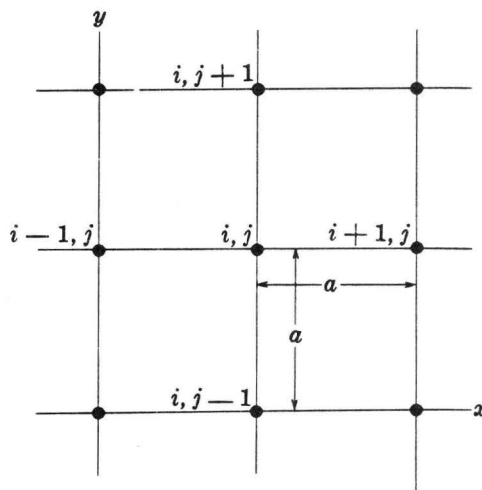
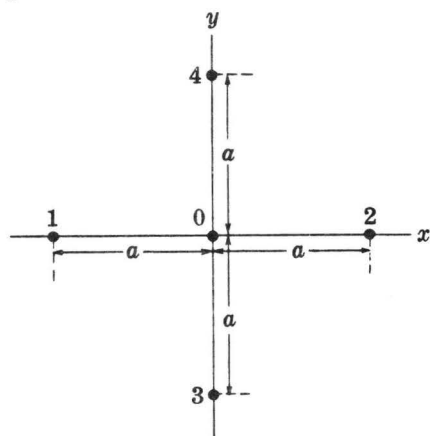
Utilizando la notación de nuestra red de diferencias finitas mostrada en la parte inferior de la figura, el pozo al centro del ordenamiento será denominado i, j ; los pozos restantes serán designados como $i-1, j$; $i+1, j$; $i, j-1$; y $i, j+1$, como se muestra. Es sólo cuestión de substituir

Con.—20□□

estas designaciones por las designaciones 0, 1, 2, 3 y 4 utilizadas en el desarrollo inicial.

Regrese a la Sección 2 y elija otra respuesta.

Figure A



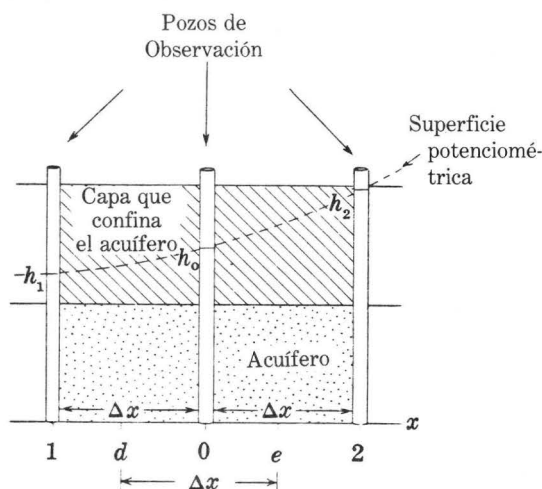
Su respuesta en la Sección 25 es incorrecta.

Su paso inicial, el de dar la formulación para computar los nuevos valores de $h_{i,j}$ utilizando los valores previos de $h_{i-1,j}$, $h_{i+1,j}$, $h_{i,j-1}$, y $h_{i,j+1}$, es correcto. Sin embargo, su segundo paso no es correcto. El propósito es continuar el proceso hasta que la diferencia entre el valor previo y el nuevo valor de $h_{i,j}$ llegue a ser muy pequeña en cualquier parte de la red. Por lo tanto, $R_{i,j}$ debe

21□□

representar la diferencia entre $h_{i,j}$ (Nuevo Valor) y $h_{i,j}$ (Valor Previo); y el proceso deberá continuar hasta que $R_{i,j}$ sea insignificante por toda la red.

Regrese a la Sección 25 y elija otra respuesta.



22□□

Su respuesta en la Sección 12,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{h_2 - h_0}{\Delta x} - \frac{h_0 - h_1}{\Delta x}}{2\Delta x}$$

es incorrecta. El numerador en su respuesta presenta la diferencia entre dos términos: $(h_2 - h_0)/\Delta x$, que se aproxima a $\partial h/\partial x$ en el punto e ; y $(h_0 - h_1)/\Delta x$, que se aproxima a $\partial h/\partial x$ en el punto d .

22□□ — Con.

El numerador representa la diferencia

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_c - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_d;$$

es decir, se aproxima al cambio $\partial h/\partial x$ entre los puntos d y e . Por lo tanto, si se divide por Δx , el intervalo entre los puntos d y e tendríamos una aproximación a

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\partial x};$$

es decir, $\partial^2 h/\partial x^2$ en el punto medio, 0, del intervalo entre d y e . En la respuesta que usted eligió, la cantidad

$$\frac{h_2 - h_0}{\Delta x} - \frac{h_0 - h_1}{\Delta x}$$

se divide por $2\Delta x$, en vez de Δx .

Regrese a la Sección 12 y elija otra respuesta.

23□□

Su respuesta en la Sección 4 es incorrecta.

La coordenada de un punto, en espacio y tiempo, se encuentra multiplicando el número de nodos entre el origen y el punto en cuestión a lo largo de los ejes apropiados, por la distancia nodal a lo

largo de ese eje x . Por lo tanto, la coordenada x de un nodo i, j, n es $x = i \cdot a$ debido a que hay i nodos a lo largo del eje x desde el origen a i, j y la distancia nodal es a . El mismo procedimiento puede aplicarse a lo largo de los ejes y y t , teniendo presente que la distancia nodal a lo largo del eje y es a , mientras que a lo largo del eje del tiempo es Δt .

Regrese a la Sección 4 y elija otra respuesta.

24□□

Su respuesta en la Sección 15,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{(h_1 + h_2) - (h_3 + h_4)}{a^2},$$

es incorrecta. La expresión aproximada que obtuvimos para $\partial^2 h/\partial x^2$ fue

$$\frac{h_1 + h_2 - 2h_0}{(\Delta x)^2}$$

ó, debido a que consideramos $\Delta x = a$, tendremos

$$\frac{h_1 + h_2 - 2h_0}{a^2}.$$

La expresión ofrecida en la Sección 15 para $\partial^2 h/\partial y^2$ fue

$$\frac{h_3 + h_4 - 2h_0}{(\Delta y)^2}$$

ó nuevamente, debido a que consideramos $\Delta y = a$, tendremos

$$\frac{h_3 + h_4 - 2h_0}{a^2}.$$

La suma algebraica de estas dos expresiones nos proporciona una aproximación para

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}.$$

Regrese a la Sección 15 y elija otra respuesta.

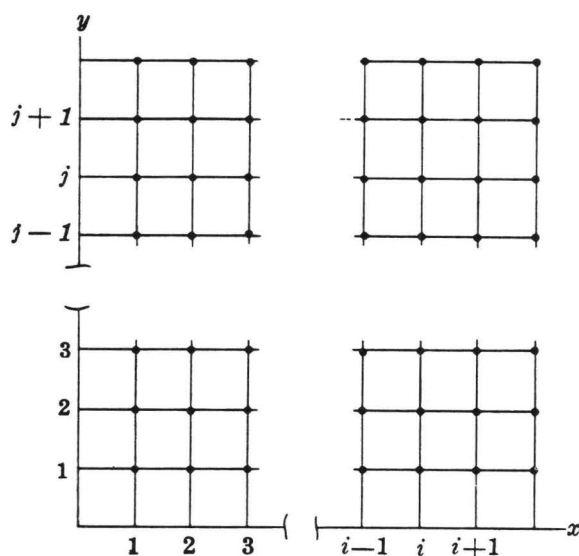
Su respuesta en la Sección 16,

$$h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - 4h_{i,j} = 0,$$

es correcta. Para resolver la misma, usando una técnica de iteración reformulamos la ecuación de la siguiente manera

$$h_{i,j} = \frac{1}{4}(h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1}),$$

y dividimos el plano x, y en una red como muestra la figura, donde las intersecciones representan los nodos en los cuales computaremos los valores de h . En la forma como se escribió, se puede observar claramente que nuestra ecuación dice en realidad que la carga en cada nodo debe ser el promedio de las cargas de los 4 nodos adyacentes. Empezamos introduciendo valores conocidos de carga a lo largo de los límites de la red —es decir, aplicando las condiciones límites. Entonces, insertamos valores asumidos de h en los nodos interiores. Estos



valores iniciales de h pueden ser cualesquier, aunque se puede ahorrar tiempo y esfuerzo si elegimos valores que se aproximen a la distribución final de carga. Nos movemos a través de la red, en cualquier orden o dirección y en cada nodo interno reemplazamos el valor de carga, por el promedio de los valores de carga de los cuatro nodos adyacentes. En cada nodo observamos no solamente el nuevo valor de h , sino también el *cambio* de h , de su valor inicial, que resulta del cálculo. Cuando hemos completado el recorrido de la red, empezamos de nuevo, reemplazando el valor de h por el promedio de las cargas de los cuatro nodos adyacentes y observamos el cambio que esto ocasiona en h . Después de repetirlo varias veces, descubrimos que el cambio de h causado por cada nuevo cálculo pasa a ser muy pequeño —en otras palabras, que el valor de la carga en cada punto ya es prácticamente igual al promedio de los valores en los 4 puntos vecinos, así al reemplazar este promedio en h , el cambio adicional es pequeño o no existe. Aquí, entonces, la distribución de carga representa una solución aproximada a nuestra ecuación de diferencias y por lo tanto, a la ecuación diferencial simulada por la anterior.

El proceso así descrito, como se observó anteriormente, es un ejemplo de la técnica de relajamiento. En general, debido a que la carga en cada nodo se utiliza para calcular la carga de los cuatro nodos vecinos, varios recorridos completos de la red podrían ser necesarios antes que los cambios en carga suficientemente pequeños en toda la red. Este método puede ser usado en cálculos manuales; también se adapta a la solución por computadoras digitales.

25□□ — Con.

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones escogería como una descripción abreviada del método de cálculo descrito anteriormente?

Pase a la Sección

$$h_{i,j}(\text{Nuevo Valor}) = \frac{1}{4} (h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1}) (\text{Valores Previos})$$

$$R_{i,j} = h_{i,j}(\text{Nuevo Valor}) - h_{i,j}(\text{Valores Previos})$$

Continúe el cálculo hasta que $|R_{i,j}| \approx 0$ para todos los puntos en la red.

17

$$h_{i,j}(\text{Nuevo Valor}) = \frac{1}{4} (h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1}) (\text{Valores Previos})$$

$$R_{i,j} = h_{i,j}(\text{Nuevo Valor})$$

Continúe el cálculo hasta que $|R_{i,j}| \approx 0$ para todos los puntos en la red.

21

$$h_{i,j}(\text{Nuevo Valor}) = \frac{1}{4} (h_{i+1,j} - h_{i-1,j} + h_{i,j+1} - h_{i,j-1}) (\text{Valores Previos})$$

$$R_{i,j} = \frac{h_{i,j}(\text{Nuevo Valor}) + h_{i,j}(\text{Valores Previos})}{2}$$

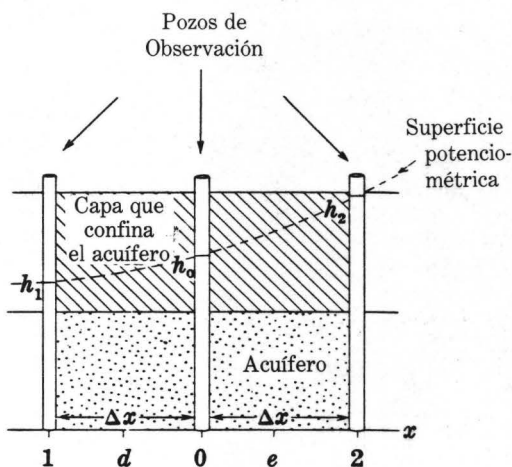
Continúe el cálculo hasta que $|R_{i,j}| \approx 0$ para todos los puntos en la red.

6

26□□

Su respuesta en la Sección 1,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_d \approx \frac{h_2 - h_1}{2\Delta x},$$



es incorrecta. Esta respuesta debería ser una aproximación razonable de la derivada en el punto 0, en el centro del ordenamiento, porque presenta la razón de cambio en h , $h_2 - h_1$, al cambio correspondiente en distancia, $2\Delta x$, sobre un intervalo el cual se centra en 0. Sin embargo, se podría mejorar para la derivada en el punto d , equidistante del pozo 1 y del pozo 0. El cambio en h sobre un intervalo centrado en d es simplemente $h_0 - h_1$, y el intervalo correspondiente de distancia es sólo Δx .

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 12,

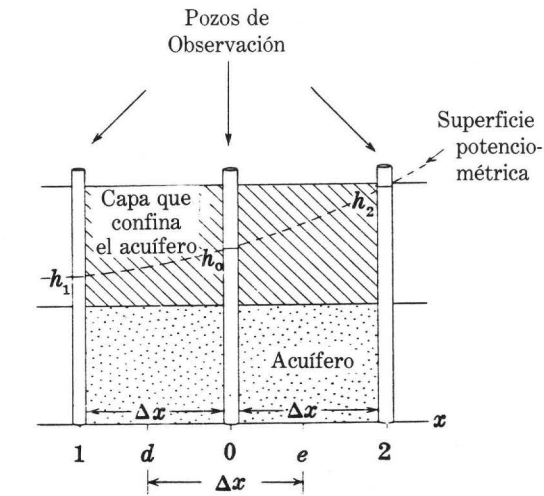
27 □ □

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h_2 - h_1}{2\Delta x},$$

es incorrecta. $h_2 - h_1$ presenta el cambio en h entre los puntos 1 y 2, y $2\Delta x$ presenta la distancia entre esos puntos. Entonces, el término $(h_2 - h_1)/2\Delta x$ es una aproximación a la primera derivada, $\partial h/\partial x$, en el punto medio del intervalo de distancia—es decir, en el punto 0. La pregunta, sin embargo, requiere un término de aproximación a la segunda derivada, $\partial^2 h/\partial x^2$, en este punto. La segunda derivada es en realidad la derivada de la primera derivada; es decir,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\partial x}.$$

Para obtener una expresión diferencial finita para este término, debemos considerar el cambio en la primera derivada, $\partial h/\partial x$, entre dos puntos y se deben dividir estos cambios en $\partial h/\partial x$ por la distancia que separa estos dos puntos. Hemos visto que $\partial h/\partial x$ en el punto d , equidistante de los pozos 1 y 0, puede ser aproximada por la expresión $(h_0 - h_1)/\Delta x$; y que $\partial h/\partial x$ en el punto e , equidistante de los pozos 0 y 2 puede ser aproxi-



mado por el término $(h_2 - h_0)/\Delta x$. Los puntos d y e son separados entre ellos por una distancia Δx , y el punto 0 es el punto medio de este intervalo. Si sustraemos nuestra expresión de aproximación para $\partial h/\partial x$ en d , de aquella para $\partial h/\partial x$ en e y dividimos el resultado por el intervalo entre d y e , Δx , debemos obtener una expresión para $\partial^2 h/\partial x^2$ en el punto 0.

Regrese a la Sección 12 y elija otra respuesta.

Su respuesta en la Sección 15,

28 □ □

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{a^2},$$

es incorrecta. El término, $-2h_0$, aparece en el numerador de ambas expresiones de aproximación—tanto para $\partial^2 h/\partial x^2$ como para $\partial^2 h/\partial y^2$. Cuando sumamos estas dos expresiones para

obtener la aproximación para $(\partial^2 h/\partial x^2) + (\partial^2 h/\partial y^2)$, estos términos en h_0 no se suprimen.

Regrese a la Sección 15 y elija otra respuesta.

Técnicas de Solución por Diferencias Finitas de la Ecuación de Flujo de Aguas Subterráneas

Ciertas técnicas de soluciones numéricas que se usan comúnmente para modelar las aguas subterráneas son descritas en el siguiente análisis. No se intenta considerar tópicos tales como estabilidad o rapidez de convergencia en términos teóricos; el lector debe referirse al trabajo de Peaceman y Rachford (1955) para el estudio de estas materias. Tampoco se intenta presentar los detalles de los procedimientos del programa. El trabajo de Prickett y Lonquist (1971) analiza algunos programas típicos y también proporciona un excelente sumario de los fundamentos matemáticos e hidrológicos de modelación digital; el trabajo de Trescott (1973) describe un programa versátil para la simulación de áreas de un acuífero. El análisis presentado aquí se limita a la descripción de algunas de las técnicas comunes de aproximación y cálculo.

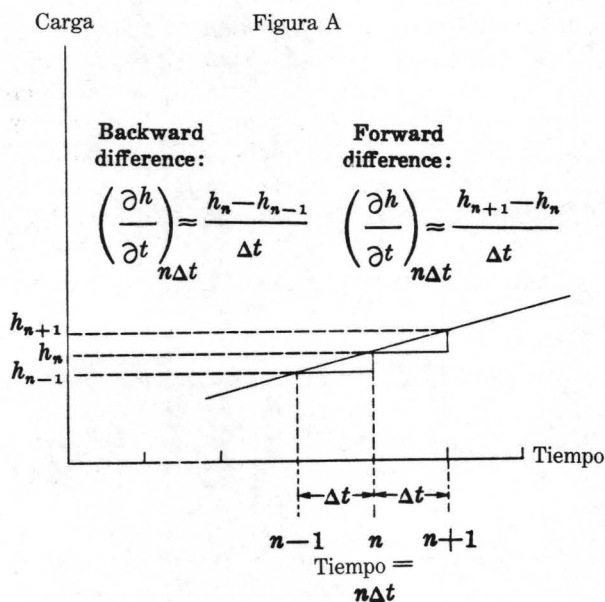
En la Sección 10 de la Parte VII, introducimos dos métodos de aproximación a la derivada de tiempo con la simulación en diferencias finitas de la ecuación de aguas subterráneas. Uno de ellos fue denominado aproximación "forward difference" y la otra aproximación "backward difference". La figura A muestra un gráfico de carga versus tiempo, el cual usaremos para repasar estas aproximaciones. El eje de tiempo está dividido en intervalos de longitud Δt . La carga al final del intervalo n se denomina h_n ; siendo el intervalo inmediatamente anterior h_{n-1} ; y el intervalo inmediatamente posterior h_{n+1} . Deseamos aproximar $\partial h / \partial t$ al final del intervalo n , es decir, cuando el tiempo es $n\Delta t$. Si utilizamos la diferencia de carga para el intervalo posterior, empleamos la aproximación "forward difference" a la derivada del tiempo; si utilizamos la diferencia de carga para el intervalo anterior utilizamos la aproximación

"backward difference". La aproximación "forward difference" se obtiene por

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_{n\Delta t} \approx \frac{h_{n+1} - h_n}{\Delta t}, \quad (1)$$

donde $(\partial h / \partial t)_{n\Delta t}$ representa la derivada para un tiempo $n\Delta t$. La aproximación "backward difference" se obtiene por

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_{n\Delta t} \approx \frac{h_n - h_{n-1}}{\Delta t}. \quad (2)$$



Simulación "Forward Difference": Solución Explícita

La ecuación de flujo de aguas subterráneas, así como se expresa en la Parte V para flujo bidimensional, es

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3)$$

donde S representa el coeficiente de almacenamiento y T la transmisibilidad. Para simular esta ecuación utilizando la formulación "forward difference" o la formulación "backward difference," primero, se escribe una expresión de aproximación para el término

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

para un tiempo $n\Delta t$ —es decir, en el punto n sobre el eje de tiempo en la figura A. Entonces, la simulación "forward difference" se caracteriza por el hecho que nos aproximamos a $\partial h/\partial t$ sobre un intervalo de tiempo, el cual sucede al tiempo en el cual nos aproximamos a $(\partial^2 h/\partial x^2) + (\partial^2 h/\partial y^2)$, mientras que la simulación "backward difference" se caracteriza por el hecho que se aproxima a $\partial h/\partial t$ en un intervalo de tiempo que antecede al tiempo en el cual nos aproximamos a $(\partial^2 h/\partial x^2) + (\partial^2 h/\partial y^2)$. En la pregunta de la Sección 10, Parte VII, obtuvimos la simulación "forward difference" a la ecuación 3 en la siguiente forma:

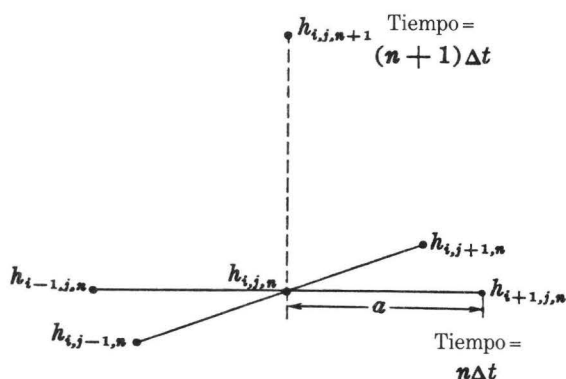
$$\frac{h_{i-1,j,n} + h_{i+1,j,n} + h_{i,j-1,n} + h_{i,j+1,n} - 4h_{i,j,n}}{a^2} = \frac{S}{T} \frac{h_{i,j,n+1} - h_{i,j,n}}{\Delta t}, \quad (4)$$

donde a es el espaciado nodal, S el coeficiente de almacenamiento y T la transmisibilidad. Deseamos saber el nuevo valor de la carga en el tiempo $(n+1)\Delta t$ para el punto i, j . La figura B muestra un diagrama del patrón computacional de esta simulación; la carga en el nodo i, j a un tiempo $(n+1)\Delta t$ depende de la carga en los cinco nodos ordenados para el tiempo anterior $n\Delta t$. Los cinco valores de h para un tiempo $n\Delta t$ son todos conocidos. Necesitamos únicamente reorganizar la ecuación, resolverla para $h_{i,j,n+1}$, e introducir los valores conocidos de $h_{i-1,j,n}$, $h_{i+1,j,n}$, $h_{i,j-1,n}$, $h_{i,j+1,n}$, y $h_{i,j,n}$. No es necesario usar ecuaciones simultáneas; la carga

de cada nodo se computa explícitamente, utilizando la carga de ese nodo y de los cuatro nodos vecinos en el tiempo anterior. La secuencia en la cual nos desplazamos en el plano x, y , calculando nuevos valores de carga no es de importancia. La solución en un punto no requiere información de los puntos adyacentes para el mismo tiempo—solamente para el tiempo anterior. Por todas estas razones, la técnica "forward difference" es, en sentido computacional, más simple que la técnica "backward difference".

Sin embargo, como se indicó antes, el método "forward difference" tiene una desventaja seria. Al menos que la relación $\Delta t/a^2$ se mantenga suficientemente pequeña, los errores, que aumentan en magnitud en cada paso del cálculo, pueden aparecer en el resultado. Para ser más explícitos supongamos que por una u otra razón, un error aparece para un nodo en un tiempo particular; al menos que la proporción $\Delta t/a^2$ sea muy pequeña, este error aumentará en magnitud en cada paso sucesivo de tiempo en el cálculo hasta que el error eventualmente domine la solución. El término "error" se utiliza aquí, como la diferencia entre la carga en el nodo i, j cuando el tiempo es $n\Delta t$, y el valor actual de la carga—es decir, el valor obtenido por la solución exacta a la ecuación diferencial en ese punto y

Figura B



en ese tiempo. Tales errores son inevitables en la aplicación normal de los métodos de diferencias finitas. Generalmente, aparecen por toda la red en los primeros pasos del cálculo. Si la restricción sobre $\Delta t/a^2$ se satisface, estos errores desaparecerán conforme la computación en se-

cuencia continúa; entonces, se dice que la solución es estable. Si la restricción no se satisface, los errores aumentarán sucesivamente para cada paso de tiempo y eventualmente invalidarán todo significado que la solución pudiera tener: en este caso se dice que la solución es inestable.

Simulación "Backward Difference": Solución por Iteración

Debido a esta limitación en la aproximación "forward difference", se pone atención a la variedad de métodos alternativos. Uno de estos es la simulación de la ecuación diferencial 3,

utilizando la aproximación "backward difference" a la derivada del tiempo, tal como se presenta en la ecuación 2. La ecuación de diferencias finitas resultante es

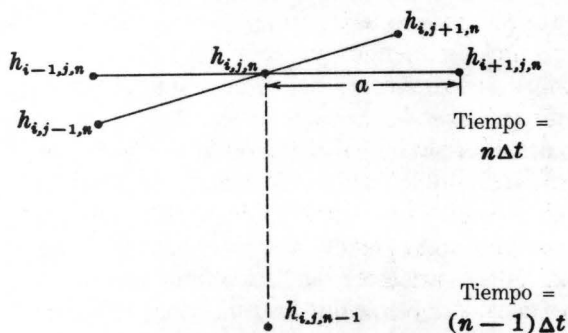
$$\frac{h_{i-1,j,n} + h_{i+1,j,n} + h_{i,j-1,n} + h_{i,j+1,n} - 4h_{i,j,n}}{a^2} = \frac{S}{T} \frac{h_{i,j,n} - h_{i,j,n-1}}{\Delta t} \quad (5)$$

La figura C muestra un diagrama del patrón computacional de la ecuación 5. La derivada del tiempo es simulada sobre un intervalo, el cual precede al tiempo en el cual $(\partial^2 h / \partial x^2) + (\partial^2 h / \partial y^2)$ se simula. La ecuación incorpora cinco valores desconocidos de carga que corresponden al tiempo $n\Delta t$ y un solo valor de carga conocido, correspondiente al tiempo $(n-1)\Delta t$. Es evidente que no podemos obtener una solución explícita para una ecuación como lo es la ecuación 5, de la misma manera que lo podríamos hacer para la ecuación 4. Podemos, sin embargo, escribir una ecuación similar a la ecuación 5 para cada nodo en el plano x, y ; por lo tanto debido a que hay un solo

valor desconocido de carga (para el tiempo $t = n\Delta t$) en cada nodo del plano, tendremos un sistema en el cual el número total de ecuaciones será igual al número de incógnitas. Por lo tanto, será posible resolver el sistema de ecuaciones simultáneas y obtener los nuevos valores de $h_{i,j,n}$ en cada nodo. La única desventaja de esta aproximación es la gran cantidad de trabajo que se pudiera requerir para resolver el sistema de ecuaciones simultáneas. Por otra parte, la ventaja radica en que es una técnica estable que no toma en cuenta el tamaño del lapso de tiempo; es decir, que los errores tienden a disminuir en vez de aumentar conforme la computación prosigue, sin relación al tamaño de Δt en comparación con a^2 .

El esfuerzo requerido para utilizar la técnica "backward difference" depende de las dimensiones del problema—es decir, del número de ecuaciones en el conjunto simultáneo. Si el número llega a ser muy grande, como en la mayoría de los casos en aguas subterráneas, este esfuerzo se torna muy grande, sobre todo cuando se usan métodos directos normales para resolver ecuaciones simultáneas. Por esta razón, vale la pena, buscar métodos eficientes para resolver estos conjuntos de ecuaciones. Ocurre que iteración y relajamiento—procesos descritos

Figura C



en la Sección 25 de la Parte VII, en conexión con la solución de la ecuación de estado permanente—nos proporcionan una aproximación razonablemente eficiente.

La ecuación que estamos tratando de resolver por iteración en la Sección 25 de la Parte VII reformulada aquí, utilizando los índices i, j en la notación, es

$$\frac{1}{4}(h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1}) = h_{i,j} \quad (6)$$

Esta ecuación expresa que la carga en el nodo i, j debería ser el promedio de las cargas de los cuatro nodos vecinos. No se incluyen índices de tiempo, debido a que estamos tratando una situación de estado permanente. Nuestro

método es simplemente desplazarnos en el plano, x, y y reemplazar la carga de cada nodo por el promedio de las cargas en los cuatro nodos vecinos. Este proceso continúa hasta que los cambios de carga sean insignificantes—es decir, hasta que la carga en cada nodo permanezca inalterada después de cada recorrido en el plano, indicando que la ecuación 6 se satisface en todo el plano.

Al aplicar la iteración en nuestro problema de no-equilibrio, el propósito es ejecutar una serie similar de recorridos en el plano x, y para cada lapso de tiempo, utilizando la ecuación 5 en vez de la ecuación 6 como la base para el cálculo en cada nodo. Por lo tanto, para computar las cargas para el tiempo $n\Delta t$ reordenamos la ecuación 5 como sigue:

$$h_{i,j,n} = \left(\frac{1}{\frac{4}{a^2} + \frac{S}{T\Delta t}} \right) \left\{ \frac{h_{i-1,j,n} + h_{i+1,j,n} + h_{i,j-1,n} + h_{i,j+1,n}}{a^2} + \frac{S}{T\Delta t} h_{i,j,n-1} \right\}. \quad (7)$$

Podemos imaginarnos un plano x, y para un tiempo $n\Delta t$, conteniendo inicialmente valores específicos de $h_{i,j,n}$ en algunos nodos, correspondientes a las condiciones límites, y valores de prueba de $h_{i,j,n}$ para los nodos restantes. Escribimos una ecuación en la forma de la ecuación 7 para cada nodo no controlado por una condición límite y escribimos las ecuaciones expresando las condiciones límites para los nodos a los cuales dichas condiciones se aplican. En la ecuación 7, el valor de $h_{i,j,n}$ se expresa en términos de carga de los cuatro nodos vecinos al mismo tiempo y la carga del mismo nodo para el tiempo anterior. Al resolver el conjunto de ecuaciones para los valores de $h_{i,j,n}$, los valores de $h_{i,j,n-1}$ en realidad constituyen términos constantes o conocidos, calculados en el paso anterior de la operación. Así que la ecuación 7 relaciona la carga de cada nodo a la carga de los cuatro nodos vecinos, en términos de un conjunto de constantes o de cantidades conocidas. Esta ecuación es un poco más dificultosa que la ecuación 6 en la cual en vez de multiplicar la suma de las cargas de los nodos vecinos por $1/4$, debemos multiplicar por el término

$$\frac{1}{\left(\frac{4}{a^2} + \frac{S}{T\Delta t} \right) \cdot a^2}$$

y agregar el término conocido

$$\frac{\frac{S}{T\Delta t}}{\frac{4}{a^2} + \frac{S}{T\Delta t}} \cdot h_{i,j,n-1}$$

en el lado derecho. Sin embargo, estos cambios no hacen difícil la solución de la ecuación. Aún podemos, utilizar el proceso de iteración; es decir, podemos desplazarnos por el plano x, y , reemplazando cada valor original de ensayo de $h_{i,j,n}$ por un nuevo valor, calculado por los 4 valores vecinos en la ecuación 7. En cada nodo, anotamos la diferencia entre el nuevo valor $h_{i,j,n}$ calculado y el valor inicial de ensayo. Si la diferencia entre estos valores es insignificante en cada nodo, podemos concluir que los valores iniciales satisfacen la ecuación 7 y no sería necesario continuar con la computación de

nuevos valores. Sin embargo, por lo general, se observará un cambio mensurable en el valor de h en cada nodo, indicando que los valores iniciales no satisfacen la ecuación 7 y que el proceso de iteración está produciendo un ajuste hacia nuevos valores que satisfacerán la ecuación. En este caso, recorreremos nuevamente el plano x, y repitiendo el procedimiento; cada valor de $h_{i,j,n}$ calculado en el primer paso (o iteración) se reemplaza por un nuevo valor calculado de las cargas de los cuatro nodos vecinos por la ecuación 7. Nuevamente, se registra la diferencia entre el valor nuevo y el valor anterior de cada nodo. Se realiza una prueba para comprobar si esta diferencia es lo suficientemente pequeña para indicar que el nuevo orden de los valores de carga satisface con aproximación a la ecuación 7. Se continúa el proceso hasta que la diferencia entre los nuevos valores computados y los valores precedentes sea insignificante en toda la red y esto indicaría que la ecuación 7 se satisface en todos los puntos.

La técnica descrita anteriormente es a menudo referida como el método de Gauss-Seidel: es básicamente el mismo procedimiento aplicado al problema de estado permanente en la Sección 25 de la Parte VII. Es un ejemplo de la técnica de relajamiento que es un método de computación en el cual las diferencias entre los dos lados de una ecuación son sucesivamente reducidas por ajustes numéricos, hasta que eventualmente la ecuación se satisface. Existe una variedad de técnicas de relajamiento en uso, que difieren entre ellas en el orden o secuencia en la cual el plano x, y se recorre durante el cálculo y en otros aspectos.

Se ha descubierto que el número de cálculos requeridos para resolver el conjunto de ecua-

ciones en diferencias finitas frecuentemente puede ser reducido con la inclusión de ciertos términos "artificiales". Estos términos generalmente toman la forma

$$\lambda(h_{i,j,n}^{m+1} - h_{i,j,n}^m).$$

Los índices sobrescritos m y $m + 1$ indican niveles de iteración; es decir, $h_{i,j,n}^m$ representa el valor de $h_{i,j,n}$ después de m recorridos en el plano x, y en el proceso de iteración y $h_{i,j,n}^{m+1}$ representa el valor de $h_{i,j,n}$ obtenido en el siguiente cálculo, después de $m + 1$ recorridos. λ , denominado como un "parámetro de iteración"; es un coeficiente, que, ya sea en base a experiencia práctica o a análisis teórico, ha mostrado proporcionar soluciones más rápidamente a medida que el proceso de iteración se aproxima a su objetivo para cada lapso de tiempo, la diferencia entre el valor de $h_{i,j,n}$ obtenida en una iteración y la obtenida en la siguiente llega a ser insignificante—es decir, que el término $(h_{i,j,n}^{m+1} - h_{i,j,n}^m)$ se aproxima a cero, así que la ecuación diferencial aparece esencialmente en su forma original, sin el parámetro de iteración; la solución así obtenida se aplica a la ecuación original. En algunos casos, λ produce una secuencia de valores diferentes en iteraciones sucesivas, en vez de un valor constante único. Nuevamente, la secuencia particular de estos valores se escoge, ya sea por análisis teórico o en base a experiencias, de tal forma que se produzca la solución más rápida. Cuando un parámetro de iteración o secuencia de los parámetros de iteración es utilizada, el proceso de relajamiento se denomina "sobrerelajamiento sucesivo" y es frecuentemente designado por las iniciales SOR. Forsythe y Wasow (1960) y otros presentan discusiones y análisis de esta técnica.

Procedimiento de Dirección Alterna Implícita

El trabajo requerido para obtener una solución por técnicas de relajamiento es frecuentemente tedioso, particularmente para problemas de grandes dimensiones. Por esta razón, se ha hecho un gran esfuerzo para desarrollar aproximaciones alternas. Peaceman y Rachford

(1955) propusieron una técnica de computación que ha sido utilizada ampliamente y en una variedad de formas. El nombre "dirección alterna" ha sido aplicado al procedimiento general de cálculo propuesto.

Para simplificar el análisis de sus técnicas in-

introduciremos nuevas notaciones. Vimos en las Secciones 12 y 15 de la Parte VII que una aproximación a $\partial^2 h / \partial x^2$ se da por el término

$$\frac{h_1 + h_2 - 2h_0}{(\Delta x)^2},$$

o utilizando los índices

$$\frac{h_{i-1,j} + h_{i+1,j} - 2h_{i,j}}{(\Delta x)^2}$$

En el análisis que sigue, dejaremos que el símbolo $\Delta_{xx}h$ represente esta aproximación a $\partial^2 h / \partial x^2$. Es decir, decimos que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \Delta_{xx}h = \frac{h_{i-1,j} + h_{i+1,j} - 2h_{i,j}}{(\Delta x)^2}. \quad (8)$$

Además, utilizaremos un índice para indicar el tiempo en el cual se considera la aproximación. Por ejemplo, $(\Delta_{xx}h)_n$ indicará una aproximación a la segunda derivada para un tiempo $n\Delta t$, o específicamente

$$(\Delta_{xx}h)_n = \frac{h_{i-1,j,n} + h_{i+1,j,n} - 2h_{i,j,n}}{(\Delta x)^2}. \quad (9)$$

$(\Delta_{xx}h)_{n-1}$ representará una aproximación a la segunda derivada para un tiempo $(n-1)\Delta t$, y así sucesivamente. Igualmente, usaremos la notación $\Delta_{yy}h$ para representar nuestra aproximación a $\partial^2 h / \partial y^2$; es decir,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \Delta_{yy}h = \frac{h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - 2h_{i,j}}{(\Delta y)^2} \quad (10)$$

y nuevamente, $(\Delta_{yy}h)_n$ representará nuestra aproximación a $\partial^2 h / \partial y^2$ para un tiempo $n\Delta t$, o sea,

$$(\Delta_{yy}h)_n = \frac{h_{i,j-1,n} + h_{i,j+1,n} - 2h_{i,j,n}}{(\Delta y)^2} \quad (11)$$

y así sucesivamente.

Usando esta notación nuestra aproximación "forward difference" a la ecuación

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3)$$

como fue expresada en la ecuación 4, se reordenará como

$$(\Delta_{xx}h)_n + (\Delta_{yy}h)_n = \frac{S}{T} \frac{h_{i,j,n+1} - h_{i,j,n}}{\Delta t}. \quad (12)$$

En esta formulación, $\partial^2 h / \partial x^2$ y $\partial^2 h / \partial y^2$ se simulan al principio del intervalo de tiempo sobre el cual $\partial h / \partial t$ es simulada.

Nuevamente utilizando la notación introducida anteriormente, nuestra aproximación "backward difference" a la ecuación 3 como se expresa en la ecuación 5, será reordenada como

$$(\Delta_{xx}h)_n + (\Delta_{yy}h)_n = \frac{S}{T} \frac{h_{i,j,n} - h_{i,j,n-1}}{\Delta t}. \quad (13)$$

En esta formulación, $\partial^2 h / \partial x^2$ y $\partial^2 h / \partial y^2$ se simulan para el tiempo $n\Delta t$, mientras que $\partial h / \partial t$ se simula sobre el intervalo de tiempo entre $(n-1)\Delta t$ y $n\Delta t$; por lo tanto, ambos $\partial^2 h / \partial x^2$ y $\partial^2 h / \partial y^2$ se aproximan al final del intervalo de tiempo por el cual $\partial h / \partial t$ es aproximado.

Como fue originalmente propuesta, la técnica de Peaceman y Rachford se denomina generalmente como el procedimiento de dirección alterna implícita. En esta forma la simulación utiliza dos ecuaciones aplicables sobre dos intervalos de tiempos sucesivos. En la primera ecuación, $\partial^2 h / \partial x^2$ se simula al principio del intervalo de tiempo y $\partial^2 h / \partial y^2$ al final de ese intervalo; $\partial h / \partial t$ se simula utilizando el cambio en carga ocurrido sobre el intervalo. La segunda ecuación se aplica sobre el intervalo siguiente-inmediato. Aquí el orden es intercambiado— $\partial^2 h / \partial y^2$ es simulado al principio del intervalo de tiempo, $\partial^2 h / \partial x^2$ es simulado al final y otra vez $\partial h / \partial t$ es simulado utilizando la diferencia de carga obtenida sobre el intervalo.

Utilizando esta notación introducida anteriormente, esta simulación puede ser representada por el siguiente par de ecuaciones:

$$(\Delta_{xx}h)_{n-1} + (\Delta_{yy}h)_n = \frac{S}{T} \cdot \frac{h_{i,j,n} - h_{i,j,n-1}}{\Delta t} \quad (14)$$

$$(\Delta_{yy}h)_n + (\Delta_{xx}h)_{n+1} = \frac{S}{T} \cdot \frac{h_{i,j,n+1} - h_{i,j,n}}{\Delta t}. \quad (15)$$

Para el primer intervalo de tiempo, $\partial^2 h / \partial x^2$ se simula a $(n-1)\Delta t$; $\partial^2 h / \partial y^2$ es simulada a $n\Delta t$; y

$\partial h/\partial t$ es simulada por el cambio en $h_{i,j}$ entre $(n-1)\Delta t$ y $n\Delta t$. Para el segundo intervalo de tiempo $\partial^2 h/\partial h^2$ es simulada por $n\Delta t$; $\partial^2 h/\partial x^2$ es simulada por $(n+1)\Delta t$; y $\partial h/\partial t$ es simulada por el cambio en $h_{i,j}$ entre $n\Delta t$ y $(n+1)\Delta t$.

La Figura D ilustra la forma de esta simulación. Se debe recordar de la Sección 3 que líneas paralelas al eje de las x en la red diferencial finita se denominan filas y que las líneas paralelas al eje de las y se denominan columnas. Como se muestra en la Figura D, 3 valores de h se toman sobre la fila j para un tiempo $(n-1)\Delta t$ para simular $\partial^2 h/\partial x^2$, mientras que para el tiempo $n\Delta t$ se toman tres valores de h a lo largo de la columna i para simular $\partial^2 h/\partial y^2$. La derivada del tiempo se simula utilizando la diferencia entre el valor central h en estos dos tiempos. Para el intervalo de tiempo sucesivo, los tres valores de h a lo largo de la columna i se consideran primero para simular $\partial^2 h/\partial y^2$ para el tiempo $n\Delta t$; mientras que para el tiempo $(n+1)\Delta t$, se toman los tres valores de h a lo largo de la fila j para simular $\partial^2 h/\partial x^2$. Nuevamente la derivada del tiempo se simula utilizando la diferencia entre los valores centrales de h .

Las técnicas "forward difference" y "backward difference" se caracterizan por su simetría en su simulación de la expresión $(\partial^2 h/\partial x^2) + (\partial^2 h/\partial y^2)$. Ambos términos de esta expresión se simulan, al mismo tiempo, utilizando un ordenamiento de cinco nodos centrados alrededor de un valor de carga, $h_{i,j,n}$. Sin embargo, la simulación $\partial h/\partial t$ en esta formulación es asimétrica; es decir, no está centrada en tiempo en torno a $h_{i,j,n}$ pero se extiende hacia atrás y hacia adelante del tiempo $n\Delta t$. Sin embargo, en cualquiera de los dos casos, si permitimos que Δt sea muy pequeño, los efectos de esta asimetría desaparecen; la aproximación entonces se acerca más y más al valor de $\partial h/\partial t$ para el tiempo $n\Delta t$. En el procedimiento de dirección alterna implícita, por contraste, $\partial^2 h/\partial x^2$ y $\partial^2 h/\partial y^2$ no se simulan al mismo tiempo, en este sentido la simulación de $(\partial^2 h/\partial x^2) + (\partial^2 h/\partial y^2)$ no puede ser definida como simétrica. Es nuevamente muy útil, imaginarse qué pasaría si Δt llega a ser muy pequeña de manera que los tiempos $(n-1)\Delta t$ y $n\Delta t$, en los cuales las simulaciones individuales ocurren, se acercan más y más. En este caso, $(\Delta_{xx}h)_{n-1}$, debería empezar a aproximarse al valor de $\partial^2 h/\partial x^2$ para $(n-1/2)\Delta t$, mientras que $(\Delta_{yy}h)_n$ debería empezar a aproximarse al valor $\partial^2 h/\partial y^2$

para $(n-1/2)\Delta t$. De esta forma, entonces, la expresión

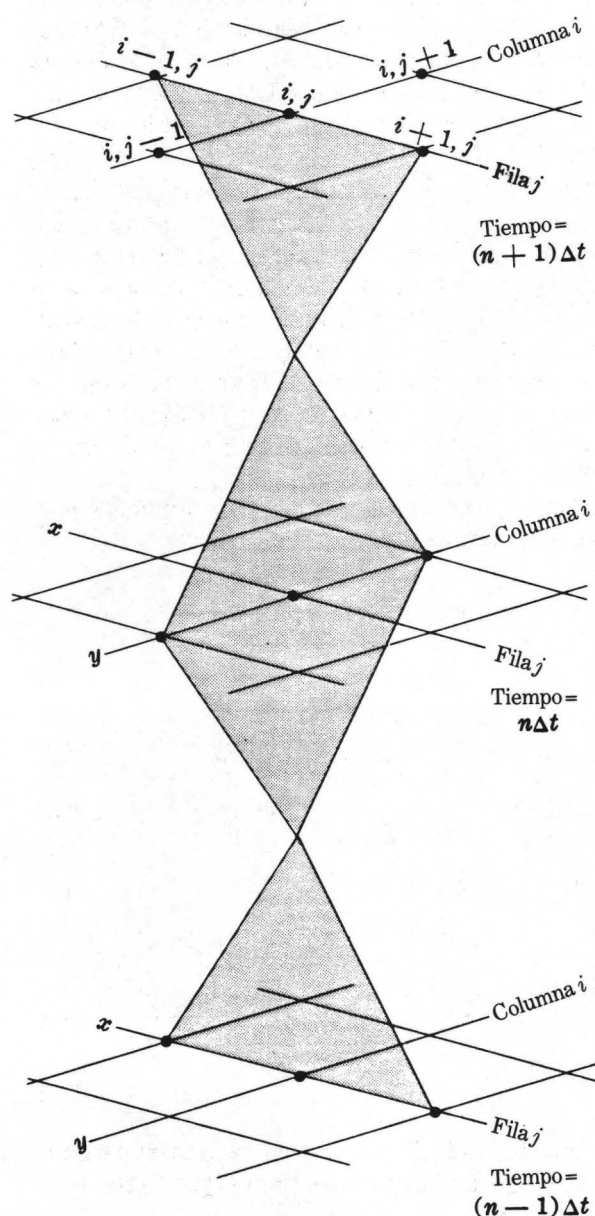
$$(\Delta_{xx}h)_{n-1} + (\Delta_{yy}h)_n$$

puede considerarse una aproximación a

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

para un tiempo $(n-1/2)\Delta t$. La simulación de $\partial h/\partial t$ es simétrica con respecto a este tiempo debido a

Figura D



que utiliza la diferencia de carga $h_n - h_{n-1}$. Por eso aún si cierta simetría existe en la expresión por la cual $(\partial^2 h / \partial x^2) + (\partial^2 h / \partial y^2)$ se aproxima a la técnica de dirección alterna, se puede argumentar que existe una simetría con respecto al tiempo en la simulación de $\partial h / \partial t$. Aún más, podemos suponer intuitivamente que si se genera un error por el hecho que simulamos $\partial^2 h / \partial x^2$ antes de $\partial^2 h / \partial y^2$ durante un intervalo de tiempo, cierto tipo de error de compensación se generaría durante el siguiente intervalo de tiempo, cuando simulamos $\partial^2 h / \partial y^2$ antes de $\partial^2 h / \partial x^2$ y en efecto ocurre que esta alteración en el orden de simulación es esencial para la estabilidad del método. Si el orden de simulación se invierte, en esta forma, entonces no importa cual fuese el tamaño del paso de tiempo, el cálculo no será afectado por errores que aumentarán para cada paso en los cálculos. Otra condición de estabilidad es que los intervalos de tiempo representados en los dos pasos de la simulación (ecuaciones 14 y 15) deben ser iguales. La longitud del intervalo de tiempo puede diferir de un par de pasos de tiempo al siguiente, pero dentro de un mismo par, como se usa en las ecuaciones 14 y 15 los dos valores de Δt deberán ser los mismos. Finalmente, el número total de pasos de tiempo debe ser par; $\partial^2 h / \partial y^2$ debe ser simulada antes de $\partial^2 h / \partial x^2$ tantas veces como $\partial^2 h / \partial x^2$ es simulada antes de $\partial^2 h / \partial y^2$.

Si las ecuaciones 14 y 15 se escriben utilizando las notaciones anteriores, tenemos:

$$\frac{h_{i-1,j,n-1} + h_{i+1,j,n-1} - 2h_{i,j,n-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j-1,n} + h_{i,j+1,n} - 2h_{i,j,n}}{(\Delta y)^2} = \frac{S}{T} \frac{h_{i,j,n} - h_{i,j,n-1}}{\Delta t},$$

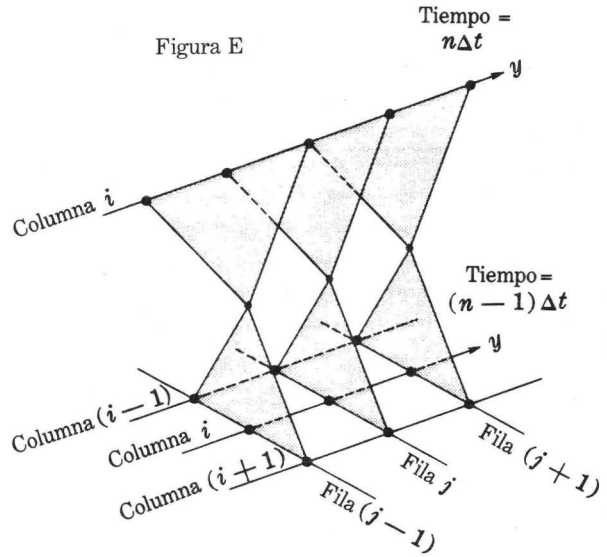
(16)

y

$$\frac{h_{i-1,j,n+1} + h_{i+1,j,n+1} - 2h_{i,j,n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j-1,n} + h_{i,j+1,n} - 2h_{i,j,n}}{(\Delta y)^2} = \frac{S}{T} \frac{h_{i,j,n+1} - h_{i,j,n}}{\Delta t}.$$

(17)

La ecuación 16 incluye tres valores de carga a lo largo de la fila j para un tiempo $(n-1)\Delta t$ y tres



valores de carga a lo largo de la columna i para un tiempo $n\Delta t$. Asumimos que los valores de carga para el tiempo inicial, $(n-1)\Delta t$, han sido calculados para todo el plano x, y y que nos interesa el cálculo de los valores de carga para el tiempo $n\Delta t$. La ecuación 16 contiene entonces tres valores conocidos de carga para el tiempo $(n-1)\Delta t$ y tres valores de carga desconocidos, para el tiempo $n\Delta t$. Debido a que tenemos tres incógnitas en una ecuación, necesitaremos utilizar ecuaciones simultáneas. En este caso, las tres incógnitas se presentan a lo largo de una sola columna y considerando otras ecuaciones las cuales se aplican a lo largo de esta columna, podemos desarrollar un método conveniente de solución.

Supongamos que existen m nodos a lo largo de la columna i y que la carga se especifica en los dos nodos finales por las condiciones límites, pero que se deben determinar las cargas de los nodos internos. El primer nodo se identifica con el índice $j = 1$ (asumimos que el eje x donde $j = 0$, se ubica fuera del área del problema); el nodo final se identifica por el índice $j = m$. Por lo tanto, $h_{i,1,n}$ y $h_{i,m,n}$ se especifican por las condiciones límites, mientras que $h_{i,2,n}$ hasta $h_{i,m-1,n}$ deben ser calculadas.

Podemos escribir una ecuación de la forma de la ecuación 16 para cada nodo interior a lo largo de la columna i . Al introducir la ecuación para cada nodo, utilizamos tres valores conocidos de la carga del "plano de tiempo" $(n-1)\Delta t$; estos

valores conocidos caen sobre una banda de tres columnas, como se muestra en la Figura E. Cada ecuación incorpora también tres valores de carga para el nuevo tiempo $n\Delta t$, todos sobre la columna i . Al establecer una ecuación de la forma de la ecuación 16 para cada nodo interno a lo largo de la columna, tendremos un sistema de $m-2$ ecuaciones en $m-2$ incógnitas las cuales pueden resolverse simultáneamente. La solución de este grupo de ecuaciones se realiza independientemente a las soluciones de las columnas adyacentes en la red. Por eso, en vez de tratar con un grupo de, digamos, 2,500 ecuaciones simultáneas en una red de 50 por 50 ordenamientos, podemos en cambio tratar

separadamente grupos de solamente 50 ecuaciones. Cada uno de estos grupos corresponde a una columna en la red; siendo más fácil de resolver que el grupo de 2,500 ecuaciones, no solamente porque es un número más pequeño de ecuaciones, sino también porque se pueden hacer las computaciones en un orden conveniente. Podemos usar este orden de computación por medio de una técnica desarrollada por H.L. Thomas (1949) que se conoce como el algoritmo de Thomas.

Para ilustrar este método, reordenamos la ecuación 16 colocando los valores desconocidos de carga que corresponden al tiempo $n\Delta t$, en un lado, como sigue:

$$\frac{h_{i,j-1,n}}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{S}{T\Delta t} + \frac{2}{(\Delta y)^2} \right) h_{i,j,n} + \frac{h_{i,j+1,n}}{(\Delta y)^2} = -\frac{h_{i-1,j,n-1}}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{S}{T\Delta t} - \frac{2}{(\Delta x)^2} \right) h_{i,j,n-1} - \frac{h_{i+1,j,n-1}}{(\Delta x)^2}. \quad (18)$$

El lado derecho consiste enteramente de términos conocidos, por lo tanto, es conveniente reemplazar este lado de la ecuación por un sólo símbolo, D_j , es decir,

$$D_j = -\frac{h_{i-1,j,n-1}}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{S}{T\Delta t} - \frac{2}{(\Delta x)^2} \right) h_{i,j,n-1} - \frac{h_{i+1,j,n-1}}{(\Delta x)^2}. \quad (19)$$

Este único índice, j , es suficiente para distinguir D para nuestro caso. Como se sugiere en la figura E, la secuencia de cálculo está a lo largo de la columna i . En cada punto o nodo—es decir, para cada valor j existe un solo valor de D , tomado de la banda de tres columnas en plano de tiempo anterior. Limitamos estas consideraciones a un grupo de ecuaciones, correspondientes a una columna y hacemos el cálculo de las cargas para un valor de tiempo. Por consiguiente, los índices que designan la columna y tiempo no son necesarios. Entonces, podemos omitir los índices i y n de los valores de h en el lado izquierdo de la ecuación. Con estos cambios, la ecuación 18 toma la forma

$$A_j h_{j-1} + B_j h_j + C_j h_{j+1} = D_j \quad (20)$$

en la cual

$$A_j = \frac{1}{(\Delta y)^2},$$

$$B_j = -\left(\frac{S}{T\Delta t} + \frac{2}{(\Delta y)^2} \right),$$

y

$$C_j = \frac{1}{(\Delta y)^2}.$$

Los coeficientes A , B y C son constantes para el problema que hemos postulado. Sin embargo, en algunos problemas donde se contemplan las variaciones en T , S , ó en el espaciamiento nodal, ellos podrían variar de un nodo a otro. Para mantener el análisis lo suficientemente general como para abarcar tales casos, los coeficientes han sido designados con el índice j .

Si resolvemos la ecuación 20 para h_j , que es el valor central del grupo de tres nodos representados en la ecuación, obtenemos

$$h_j = \frac{D_j - A_j h_{j-1} - C_j h_{j+1}}{B_j}. \quad (21)$$

La carga en el primer nodo, h_1 se especifica por las condiciones límites. Aplicamos la ecuación 21

para encontrar una expresión para h_2 ; esto produce

$$h_2 = \frac{D_2 - A_2 h_1 - C_2 h_3}{B_2}. \quad (22)$$

Reordenamos la ecuación en la forma

$$h_2 = g_2 - b_2 h_3, \quad (23)$$

donde

$$g_2 = \frac{D_2 - A_2 h_1}{B_2} \quad (24)$$

y

$$b_2 = \frac{C_2}{B_2}. \quad (25)$$

b_2 consiste de términos conocidos y como h_1 es conocido, g_2 puede ser calculado. Por lo tanto, la ecuación 23 nos da una ecuación para h_2 en términos del siguiente valor de carga, h_3 . Si podemos continuar a lo largo de la columna, formando ecuaciones que dan la carga en cada nodo en función de esta carga en el nodo subsiguiente—es decir, que se da h_j en términos de h_{j+1} —eventualmente alcanzaremos el penúltimo nodo de la columna y tendremos una ecuación para h_{m-1} en términos de h_m , la carga del último nodo. Por lo tanto, conocido h_m por las condiciones límites, podemos calcular h_{m-1} ; utilizando el valor de h_{m-1} , podremos calcular h_{m-2} , y así sucesivamente bajando por la columna, hasta que finalmente podremos calcular h_2 en términos de h_3 usando la ecuación 23. Esta es la idea básica del algoritmo de Thomas. Tendremos que ver si podemos en efecto obtener expresiones para cada carga h_j , en términos de la subsiguiente carga h_{j+1} , a lo largo de la columna.

Aplicamos en primer lugar la ecuación 21 para encontrar una expresión para h_3 ; esto nos da

$$h_3 = \frac{D_3 - A_3 h_2 - C_3 h_4}{B_3}. \quad (26)$$

Para eliminar h_2 de esta ecuación, sustituimos su valor de la ecuación 23 y obtenemos

$$h_3 = \frac{D_3 - A_3(g_2 - b_2 h_3) - C_3 h_4}{B_3}. \quad (27)$$

La ecuación 27 se resuelve ahora para h_3 como sigue

$$h_3 - \frac{A_3 b_2}{B_3} h_3 = \frac{D_3 - A_3 g_2 - C_3 h_4}{B_3},$$

$$h_3 = \frac{D_3 - A_3 g_2 - C_3 h_4}{B_3 \left(\frac{B_3 - A_3 b_2}{B_3} \right)},$$

ó

$$h_3 = \frac{D_3 - A_3 g_2}{B_3 - A_3 b_2} - \frac{C_3}{B_3 - A_3 b_2} h_4. \quad (28)$$

Ahora de nuevo tenemos una ecuación de la forma

$$h_3 = g_3 - b_3 h_4, \quad (29)$$

donde

$$g_3 = \frac{D_3 - A_3 g_2}{B_3 - A_3 b_2} \quad (30)$$

y

$$b_3 = \frac{C_3}{B_3 - A_3 b_2}. \quad (31)$$

Debido a que g_2 y b_2 son conocidos por el anterior paso en el cálculo (ecuaciones 24 y 25), g_3 y b_3 pueden calcularse y la ecuación 29 produce entonces una expresión para h_3 en términos de h_4 . En efecto, hemos eliminado h_2 de la ecuación 26, así que h_3 se expresa únicamente en términos de los valores subsiguientes de carga.

Si continuamos con este proceso, descubrimos que para cada paso podemos obtener una ecuación de la forma

$$h_j = g_j - b_j h_{j+1}, \quad (32)$$

relacionando la carga en cada nodo a la carga del nodo subsiguiente; descubrimos que g_j y b_j pueden siempre determinarse a partir de los valores anteriores de g y b mediante ecuaciones de la forma expresada en las ecuaciones 30 y 31. Es decir, descubrimos que

$$g_j = \frac{D_j - A_j g_{j-1}}{B_j - A_j b_{j-1}} \quad (33)$$

y

$$b_j = \frac{C_j}{B_j - A_j b_{j-1}}. \quad (34)$$

Estas fórmulas generales se aplican aún al cálculo de g_2 y b_2 si especificamos las condiciones iniciales $g_1 = h_1$ y $b_1 = 0$.

En resumen, podemos empezar en el nodo 1 y desplazarnos por la columna calculando los valores de g_j y b_j . En cada nodo, estos valores se calculan por las ecuaciones 33 y 34, utilizando los valores anteriores g_{j-1} y b_{j-1} y los coeficientes A_j , B_j y C_j además del término D_j .

Finalmente, se calculan g_{m-1} y b_{m-1} para el penúltimo nodo de la columna; debido a que se conoce h_m por las condiciones límites, h_{m-1} puede calcularse de la ecuación 32. Luego, procederemos al cálculo regresivo en la columna para los valores de h_j en cada nodo a partir del valor h_{j+1} utilizando la ecuación 32, hasta que finalmente se haya calculado un valor para h_2 y hasta que las cargas hayan sido determinadas en toda la columna.

Todo el proceso es en realidad uno de eliminación Gaussiana, que tiene la ventaja de un ordenamiento de cálculo conveniente. La solución de la ecuación diferencial 16 se obtiene directamente por los puntos a lo largo de la columna por medio de este proceso; no estamos tratando con una técnica de iteración que resuelve el grupo de ecuaciones algebraicas por aproximación sucesiva. Cuando se ha calculado la carga en todos los nodos de la columna i , el proceso se repite para la columna $i + 1$ y así

sucesivamente hasta que todo el plano haya sido recorrido.

En cierto modo, este proceso de cálculo representa un proceso parecido al de las técnicas "forward difference" y "backward difference" sin ser ni una ni la otra. En la técnica "forward difference" la carga de cada nodo, para un nivel de tiempo particular, se computa independientemente de las cargas de los 4 nodos vecinos para ese nivel de tiempo; la técnica de computación se dice ser explícita. En la técnica "backward difference", el cálculo de cada carga en cada nodo incorpora la carga de los 4 nodos vecinos para el mismo nivel de tiempo; el método de cálculo se denomina como implícito. En la técnica de dirección alterna, el cálculo de la carga para un nodo particular, a medida que nos desplazamos en la columna, incorpora las cargas para ese nivel de tiempo en los dos nodos adyacentes a lo largo de la misma, pero no la carga de los nodos vecinos ubicados en las columnas adyacentes. El método de cálculo, para este paso, se dice ser implícito a lo largo de las columnas, pero explícito en la dirección de recorrido a lo largo de las filas.

Cuando las cargas han sido calculadas en todo el plano por el proceso de recorrido por columnas, el cálculo del tiempo que sigue $(n+1)\Delta t$, se inicia utilizando la ecuación 17. El procedimiento es el mismo descrito anteriormente, excepto que el cálculo se hace ahora a lo largo de las filas en vez de las columnas. Nuevamente, este cambio de direcciones es necesario para asegurar la estabilidad del método de cálculo.

Solución de la ecuación de estado permanente por iteración utilizando el método de cálculo de dirección alterna

En el trabajo inicial el cual propone el procedimiento implícito de dirección alterna, Peaceman y Rachford indican que la técnica de solución alterna a lo largo de filas y columnas puede ser utilizada efectivamente para iteración de la ecuación de estado permanente. Es decir, supongamos que debemos analizar el problema considerado en las Secciones 16 y 25 de la Parte VII, y repasado al inicio de estas consideraciones,

en la cual la ecuación de estado permanente

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (35)$$

debe ser resuelta. En la Sección 25 consideramos una técnica de iteración o relajamiento para resolver esta ecuación. En esta técnica, escribimos la aproximación en diferen-

cias finitas presentada en la ecuación 6 como una simulación de la ecuación 35; esto produjo

$$h_{i,j} = \frac{1}{4}(h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1}). \quad (6)$$

Para aplicar la ecuación 6, nos desplazamos sobre el plano x, y reemplazando los valores de $h_{i,j}$ en cada nodo interior por el promedio de las cargas de los cuatro nodos vecinos. Al final de un recorrido completo del plano, tendremos un grupo de valores de $h_{i,j}$ que estarán más cerca de satisfacer la ecuación 6 que los valores con los que iniciamos el proceso. Después de varios recorridos, tendremos un grupo de valores de carga que básicamente podrían satisfacer la ecuación 36 para todo plano. Esto se indicaría por el hecho que los valores de $h_{i,j}$ obtenidos en cada paso diferirían muy poco de los obtenidos en el paso anterior.

Nuestro objetivo aquí es delinear una técnica más eficiente para aplicar este proceso de iteración, basado en el método de Peaceman y Rachford y el algoritmo de Thomas. Empezamos con la introducción de cierta nomenclatura y notación. En el análisis de problemas de no-equilibrio, nos referimos a "planos de tiempo"—es decir, representaciones del plano x, y en el cual se mostraban las cargas calculadas para un tiempo en particular. Al analizar la solución de los problemas de estado permanente por iteración, podemos simplemente referirnos a los "planos de iteración"—es decir, representaciones del plano x, y en el cual se muestra el valor de la carga obtenido después de un cierto número de iteraciones. Nuevamente, en el análisis de los problemas de no-equilibrio utilizamos el índice n para designar el nivel de tiempo para un valor de carga específico— $h_{i,j,n}$ se refería a un valor de carga para un tiempo $n\Delta t$. En forma similar, utilizaremos el índice sobrescrito m para denotar el nivel de iteración en el problema de estado permanente. $h_{i,j}^0$ se utilizará para designar los valores iniciales de carga antes de cualquier iteración; $h_{i,j}^1$ indicará valores de carga después de una iteración—es decir, los valores de carga en el primer plano de iteración; en general, $h_{i,j}^m$ indicará los valores de carga después de m iteraciones o en el plano de iteración m .

Seguidamente, reformulamos nuestra aproximación a la ecuación 35 en una forma

ligeramente diferente. Reordenamos la ecuación 6 para obtener

$$h_{i-1,j} + h_{i+1,j} - 2h_{i,j} = -h_{i,j-1} - h_{i,j+1} + 2h_{i,j}. \quad (36)$$

Se puede obtener lo mismo reformulando la ecuación 35 en la forma

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

y luego utilizando la aproximación obtenida en las ecuaciones 8 y 10 para $\partial^2 h/\partial x^2$ y $\partial^2 h/\partial y^2$.

Estamos interesados en la aplicación de la ecuación 36 para calcular los valores de carga para un nuevo nivel de iteración, utilizando valores de carga del nivel de iteración anterior. En el procedimiento que emplearemos es necesario considerar dos pasos sucesivos de iteración. Utilizando la notación de *índices sobrescritos* descrita anteriormente y utilizando $\Delta_{xx}h$ y $\Delta_{yy}h$ para representar nuestras aproximaciones a $\partial^2 h/\partial x^2$ y $\partial^2 h/\partial y^2$ como en las ecuaciones 8 y 10, el método de cálculo podría ser resumido de la siguiente manera

$$-\Delta_{yy}h^m = \Delta_{xx}h^{m-1} \quad (37)$$

y

$$\Delta_{xx}h^{m+1} = -\Delta_{yy}h^m \quad (38)$$

ó, en la notación de la ecuación 36,

$$\begin{aligned} -h_{i,j-1}^m - h_{i,j+1}^m + 2h_{i,j}^m \\ = h_{i-1,j}^{m-1} + h_{i+1,j}^{m-1} - 2h_{i,j}^{m-1} \end{aligned} \quad (39)$$

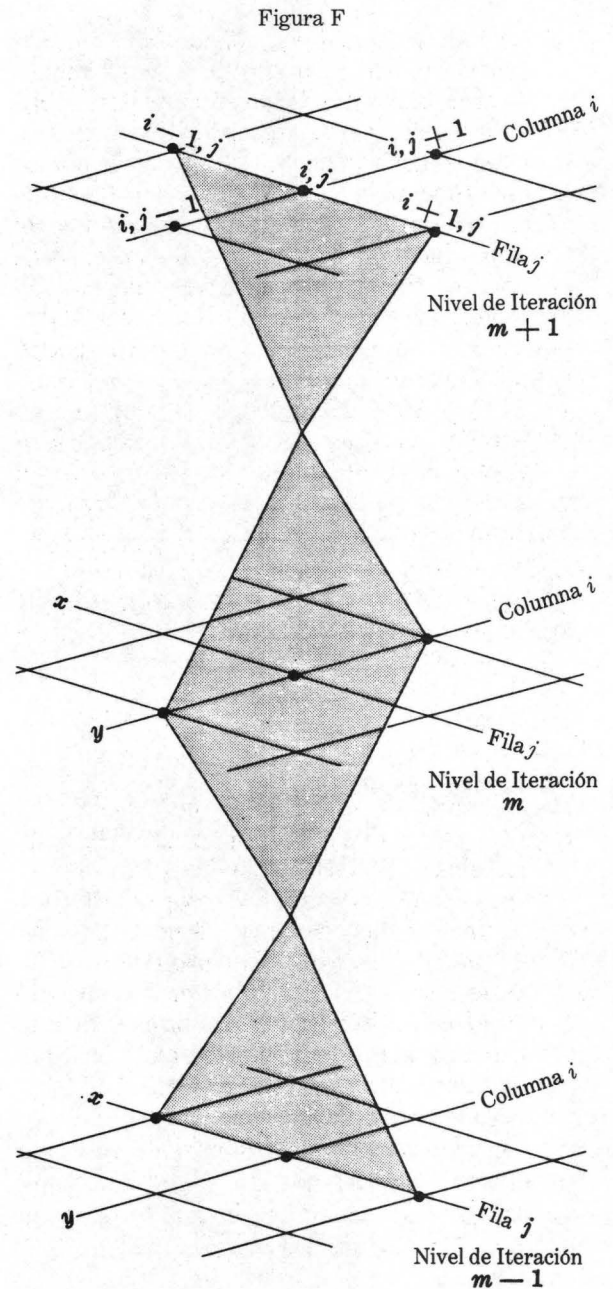
y

$$\begin{aligned} h_{i-1,j}^{m+1} + h_{i+1,j}^{m+1} - 2h_{i,j}^{m+1} \\ = -h_{i,j-1}^m - h_{i,j+1}^m + 2h_{i,j}^m. \end{aligned} \quad (40)$$

Como indican estas ecuaciones, la idea aquí es primeramente simular $\partial^2 h/\partial x^2$ en un nivel de iteración y $\partial^2 h/\partial y^2$ en el siguiente; en la iteración subsiguiente, se invierte el orden; $\partial^2 h/\partial y^2$ es simulado en la etapa inicial y $\partial^2 h/\partial x^2$ en la siguiente. La figura D, que ilustra la técnica de simulación para un problema de no-equilibrio, se reproduce como la figura F, con la diferencia que los planos de tiempo son denominados planos de iteración. La ecuación 39 relaciona los tres valores de carga en el nivel de iteración m a tres valores de carga al nivel de iteración $m-1$;

y continuando con la técnica descrita anteriormente para el caso de no-equilibrio, debemos desplazarnos a lo largo de la columna i en el plano de iteración m , en cada nodo obteniendo así 3 valores conocidos de h^{m-1} de una banda de tres columnas en el plano de iteración anterior, y por lo tanto generando un grupo de ecuaciones en las cuales las incógnitas tienen todos valores de h^m a lo largo de la columna i .

Como en el caso de no-equilibrio, el grupo de ecuaciones a lo largo de una columna se resuelve directamente por el algoritmo de Thomas—es decir, por el proceso de eliminación Gaussiana, delineado en ecuaciones 20 a 34. Cuando esto se haya hecho para cada columna del plano x, y tendremos un nuevo grupo de valores de carga en todo el plano. Sin embargo, estos valores no constituyen necesariamente una solución a la ecuación 35. El proceso de reemplazo de los valores de carga iniciales por los valores nuevos calculados que hemos descrito en la ecuación 39, llega a los mismos resultados que el proceso de relajamiento de la Sección 25. Produce un nuevo grupo de valores, el cual está más cerca de satisfacer la ecuación 35 que el grupo inicial. No representa una garantía que el nuevo grupo constituya una solución aceptable. La prueba se hace como en la técnica de relajamiento de la Sección 25, para comprobar si la solución ha sido hallada. Los valores de la carga en el plano de iteración m son comparados a aquellos en el plano de iteración $m-1$. Si la diferencia en todos los puntos es insignificante, la ecuación 35 debe satisfacerse en todo el plano x, y ; de lo contrario una nueva iteración deberá comenzar. En esta nueva iteración utilizaríamos la ecuación 40, desplazándonos a lo largo de una fila del modelo para establecer un sistema de ecuaciones para los valores de carga a lo largo de la fila. Igual que en el problema de no-equilibrio, esta alteración en la dirección es necesaria para la estabilidad. Para resumir entonces, estamos utilizando un procedimiento de solución iterativo indirecto; pero durante el proceso de iteración, usamos el método directo de eliminación Gaussiana, a lo largo de cada columna o fila individual, para desplazarnos de un grupo de valores de carga aproximados al siguiente.



Simulación "Backward Difference": Solución por iteración usando el método de cálculo de dirección alterna (procedimiento iterativo implícito de dirección alterna)

Peaceman y Rachford constataron que la iteración de la ecuación en estado permanente por el procedimiento de dirección alterna era considerablemente más eficiente que muchos de los métodos más rápidos de relajamiento que se habían usado antes. El uso de la técnica de dirección alterna en este sentido, como un método de iteración, ha adquirido recientemente gran popularidad. Sin embargo, como un método para resolver la ecuación de no-equilibrio, número 3, el procedimiento iterativo implícito de dirección alterna, como se incluye en las ecuaciones 14 y 15 ó 16 y 17, no siempre se ha demostrado ventajoso. Aunque se asegura la estabilidad, es decir, que los cálculos no serán afectados por errores que necesariamente aumentan de magnitud en cada paso, aún existe una posibilidad de un error grande en cualquier paso de tiempo y en cualquier nodo en particular; en muchos problemas estos errores han sido incontrolables e inaceptables. Esta situación indeseable ha conducido a concentrar más interés en la formulación "backward difference" de las ecuaciones 5 y 13. Como hemos observado, la solución por este método generalmente debe lograrse por medio de iteración, por ejemplo utilizando la ecuación 7. Los sistemas de ecuaciones simultáneas involucradas son por lo general muy grandes para admitir una solución fácil por métodos directos. Hemos visto que el procedimiento de dirección alterna de Peaceman y Rachford proporciona un método efectivo de iteración de la ecuación en estado permanente; esto sugiere que la misma técnica puede utilizarse para iterar las ecuaciones "backward difference" 5 ó 13. La ecuación 13, que utiliza la notación abreviada, se reproduce a continuación

$$(\Delta_{xx}h)_n + (\Delta_{yy}h)_n = -\frac{S}{T} \cdot \frac{h_{i,j,n} - h_{i,j,n-1}}{\Delta t} \quad (13)$$

$(\Delta_{xx}h)_n$ es una aproximación a $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ para el tiempo $n\Delta t$, mientras que $(\Delta_{yy}h)_n$ es una aproximación a $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ para el tiempo $n\Delta t$. Nuevamente, introducimos el índice m para indicar el nivel de iteración: Utilizando esta notación escribimos la ecuación 13 como será utilizada en dos pasos sucesivos en el proceso de iteración en consideración,

$$(\Delta_{xx}h)_{n,m-1} + (\Delta_{yy}h)_{n,m} = \frac{S}{T} \cdot \frac{h_{i,j,n}^m - h_{i,j,n-1}}{\Delta t} \quad (41)$$

$$(\Delta_{xx}h)_{n,m+1} + (\Delta_{yy}h)_{n,m} = \frac{S}{T} \cdot \frac{h_{i,j,n}^{m+1} - h_{i,j,n-1}}{\Delta t} \quad (42)$$

En las ecuaciones 41 y 42, varios puntos deben ser tomados en cuenta cuidadosamente. Las simulaciones de ambos $\partial^2 h / \partial x^2$ y $\partial^2 h / \partial y^2$, en ambas ecuaciones son efectuadas para el tiempo $n\Delta t$; y nuevamente, en ambas ecuaciones, $\partial h / \partial t$ es simulada por el cambio en carga en el nodo i, j del tiempo $(n-1)\Delta t$ al tiempo $n\Delta t$. En la ecuación 41, $(\partial^2 h / \partial x^2)_{n\Delta t}$ se simula en el nivel de iteración $(m-1)$, mientras que $(\partial^2 h / \partial y^2)_{n\Delta t}$ se simula en el nivel m de iteración; en la simulación de la derivada de tiempo, $h_{i,j,n}$ figura en el nivel m de iteración. En la ecuación 42, $(\partial^2 h / \partial y^2)_{n\Delta t}$ es simulada al nivel m de iteración, mientras que $(\partial^2 h / \partial x^2)_{n\Delta t}$ se simula al nivel $(m+1)$ de iteración; en la simulación de la derivada de tiempo, $h_{i,j,n}$ nuevamente figura en un nivel de iteración más alto, el cual es aquí $m+1$. En ninguna de las ecuaciones se incluye el índice sobrescrito de iteración $h_{i,j,n-1}$ que es la carga del nivel de tiempo anterior. El proceso de iteración está diseñado para computar las cargas para el nuevo nivel de tiempo, $n\Delta t$, y en este proceso la carga del nivel de tiempo anterior es simplemente una constante; retiene el mismo valor durante todas las series de iteraciones.

Reformulando la ecuación 41, utilizando la notación expandida para $\Delta_{xx}h$ y $\Delta_{yy}h$ (tal como se muestra en las ecuaciones 8 y 10) tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i-1,j,n}^{m-1} + h_{i+1,j,n}^{m-1} - 2h_{i,j,n}^{m-1}}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{h_{i,j-1,n}^m + h_{i,j+1,n}^m - 2h_{i,j,n}^m}{(\Delta y)^2} \\ & = \frac{S}{T} \frac{(h_{i,j,n}^m - h_{i,j,n-1})}{\Delta t} \end{aligned} \quad (43)$$

Deseamos calcular los valores de carga en el nuevo nivel de iteración, m en base a valores que hemos obtenido para el nivel de iteración anterior $m-1$. Por lo tanto, reordenamos la ecuación 43, colocando las incógnitas en la izquierda y los términos conocidos en el lado derecho, lo cual produce

$$\frac{h_{i,j-1,n}^m}{(\Delta y)^2} + \frac{h_{i,j+1,n}^m}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{S}{T\Delta t} + \frac{2}{(\Delta y)^2} \right) h_{i,j,n}^m = - \frac{h_{i-1,j,n}^{m-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{h_{i+1,j,n}^{m-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{2}{(\Delta x)^2} h_{i,j,n}^{m-1} + \frac{S}{T\Delta t} h_{i,j,n-1} \quad (44)$$

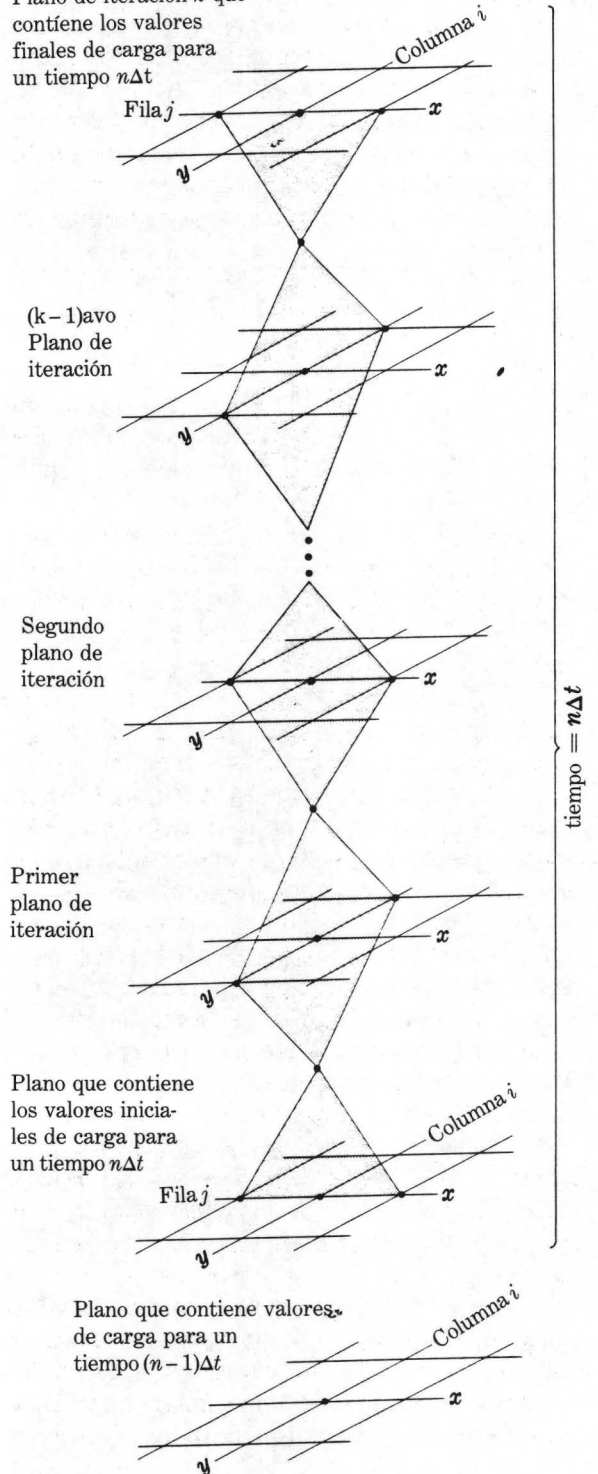
Los valores desconocidos son los valores de carga para el nivel de iteración, m ; los términos conocidos son los valores de carga para el nivel de iteración anterior, $m-1$ y un valor de carga del nivel de tiempo anterior, $n-1$. Por lo tanto, debemos proceder como en la ecuación 19, reemplazando el lado derecho por un solo símbolo, D_j , que representa los términos conocidos de la ecuación. Entonces, tendremos una ecuación en la forma de la ecuación 20,

$$A_j h_{j-1}^m + B_j h_j^m + C_j h_{j+1}^m = D_j \quad (45)$$

la cual puede ser resuelta por el algoritmo de Thomas como se delinea en las ecuaciones 21-34. En el siguiente paso, utilizamos la ecuación 42; aquí las incógnitas constan de tres valores de h para el tiempo $n\Delta t$ y el nivel de iteración $m+1$, mientras que los términos conocidos consisten de tres valores de h para el tiempo $n\Delta t$ y el nivel de iteración m y nuevamente un valor de h para el nivel de tiempo $(n-1)\Delta t$. Después de este paso, las cargas que obtenemos son comparadas con aquellas obtenidas en el paso anterior. Si la diferencia es insignificante en todas partes, los valores de h^{m+1} son considerados como aproximaciones suficientemente cercanas a las cargas para un tiempo $n\Delta t$.

Es importante recalcar que mientras que para cada paso resolvemos directamente, (por eliminación Gaussiana a lo largo de columnas y filas) para obtener un nuevo grupo de valores de carga, estos valores generalmente no constituyen una solución a nuestra ecuación diferencial. Más bien, constituyen una nueva aproximación a una solución, en una serie de iteraciones que finalmente producirán una aproximación suficientemente precisa para nuestro uso. Podemos revisar la secuencia de computación refiriéndonos a la Figura G, la cual ilustra el proceso de cálculo esquemáticamente. El plano más bajo en la figura, contiene los valores finales de carga para el tiempo anterior $(n-1)\Delta t$. El plano inmediatamente arriba de éste, contiene los valores inicialmente asumidos para un nuevo tiempo, $n\Delta t$; usamos tres valores de carga,

Figura G
Plano de iteración k que contiene los valores finales de carga para un tiempo $n\Delta t$



$h_{i-1,j,n}^0$, $h_{i,j,n}^0$, y $h_{i+1,j,n}^0$ de este plano junto a un valor de carga $h_{i,j,n-1}$ del plano de tiempo $n-1$, al lado derecho de la ecuación 44. En el lado izquierdo en la ecuación 44, tenemos tres valores desconocidos de carga en el plano de la primera iteración, $h_{i,j-1,n}^1$, $h_{i,j,n}^1$, y $h_{i,j+1,n}^1$. Establecemos las ecuaciones de la forma de la ecuación 44 a lo largo de toda la columna i y resolvemos por el algoritmo de Thomas (ecuaciones 21-34). Luego, repetimos el procedimiento a lo largo de las otras columnas, para determinar los valores de carga por todo el primer plano de iteración; los nuevos valores de carga constituyen una mejor aproximación a las cargas para un tiempo $n\Delta t$

que los valores iniciales. Seguidamente, establecemos un sistema de ecuaciones de la forma de la ecuación 42, ordenadas en tal forma que en cada ecuación los términos conocidos sean los tres valores del primer plano de iteración y uno del plano del tiempo de $n-1$, mientras que tres valores de carga del segundo plano de iteración formen las incógnitas. Si reformulamos la ecuación 42 en la notación expandida y la reordenamos de tal forma que los términos desconocidos aparezcan en la izquierda y los conocidos en la derecha tenemos

$$\frac{h_{i-1,j,n}^{m+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i+1,j,n}^{m+1}}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{S}{T\Delta t} + \frac{2}{(\Delta x)^2} \right) h_{i,j,n}^{m+1} = -\frac{h_{i,j-1,n}^m}{(\Delta y)^2} - \frac{h_{i,j+1,n}^m}{(\Delta y)^2} + \frac{2}{(\Delta y)^2} h_{i,j,n}^m - \frac{S}{T\Delta t} h_{i,j,n-1}. \quad (46)$$

Aplicando la ecuación 46 entre el primer y segundo planos de iteración, m se consideraría 1 y $(m+1)$ como 2. Los 4 términos conocidos en el lado derecho de la ecuación consistirían de tres valores de carga del primer plano de iteración $h_{i,j-1,n}$, $h_{i,j,n}$ y $h_{i,j+1,n}$ y nuevamente, un valor de carga del plano de tiempo $n-1$, $h_{i,j,n-1}$. Es importante observar que regresamos al plano de tiempo $n-1$ —el plano inferior en la Figura G—para cada nivel de iteración en la serie, para usar los valores constantes de $h_{i,j,n-1}$ que se utilizan en la simulación de la derivada de tiempo. En el lado izquierdo de la ecuación 46, tendremos los tres valores desconocidos de carga que corresponden al nuevo nivel de iteración—es decir, el segundo plano de iteración. Nuevamente, usamos el algoritmo de Thomas (ecuaciones 21-34) para obtener soluciones para los nuevos valores de carga en el plano. Al final de este procedimiento, los valores de carga del segundo plano de iteración son comparados con los del primer plano de iteración. Si la diferencia es suficientemente pequeña en todos los puntos, no hay nada que mejorar al continuar el ajuste de los valores de carga por nuevos cálculos—la ecuación 3 es ya aproximadamente satisfecha en todo el plano. Si se observan diferencias notables, se continúa el procedimiento hasta que la diferencia entre los valores de carga

obtenidos en niveles sucesivos de iteración lleguen a ser insignificantes. Ahora ya las cargas para el tiempo $n\Delta t$ fueron determinadas y la labor comienza en el siguiente paso, el cómputo de las cargas para el tiempo $(n+1)\Delta t$. Entonces, aunque tanto la solución directa como la de un método de dirección alterna toman parte en este proceso de cálculo, la técnica es básicamente de iteración, en la cual utilizando la formulación “backward difference” de las ecuaciones 5 ó 13, ajustamos progresivamente los valores de carga para cada nivel de tiempo hasta que obtenemos el grupo de valores que satisfacen la ecuación. Este método combina las ventajas de la técnica “backward difference” con la fácil computación del procedimiento de dirección alterna y es la base de muchos modelos digitales actualmente utilizados por el Servicio Geológico de Estados Unidos. A veces se le denomina como el procedimiento implícito iterativo de dirección alterna.

Prickett y Lonnquist (1971) modificaron aún más este método de cálculo representando el valor central de carga $h_{i,j}$ únicamente al nivel avanzado de iteración y representando la carga en la columna adyacente, que ha sido previamente procesada también en un nivel de iteración avanzado. Es decir, ellos no simulan $\partial^2 h / \partial x^2$ y $\partial^2 h / \partial y^2$ en dos planos distintos de

iteración, más bien establecen el cálculo como una técnica de relajamiento, para que el nuevo valor de la carga en un nodo en particular se calcule en base a los valores de carga más recientemente computados en las proximidades del nodo. Sin embargo, ellos sí efectúan los cálculos alternadamente a lo largo de filas y columnas utilizando el algoritmo de Thomas.

En el análisis presentado aquí, hemos tratado la transmisividad, coeficiente de almacenamiento, espacio nodal Δx y Δy , como términos constantes en el plano x, y . En efecto, estos términos pueden variar en la red para explicar la heterogeneidad o anisotropía del acuífero o para proporcionar un espaciamiento nodal que reúna

las condiciones requeridas en el problema. Mas términos pueden ser incluidos en las ecuaciones para explicar tales aspectos como bombeo de pozos en nodos específicos, recuperación de pérdidas por evapotranspiración, filtración en ríos, etc. Algunos programas que simulan flujo tridimensional han sido desarrollados (Freeze, 1971, Bredehoeft y Pinder, 1970, Prickett y Lonnquist, 1971, p. 46); sin embargo, los problemas operacionales que se presentan en modelos digitales tridimensionales son a veces difíciles.

El lector podrá ahora pasar al programa de la Parte VIII.

Parte VIII. Técnicas Analógicas

Introducción

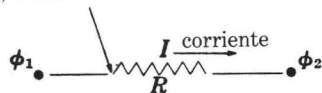
En la Parte VIII consideramos otra técnica para obtener las soluciones a la ecuación diferencial del flujo de aguas subterráneas. Este método es el de analogía eléctrica. Es una técnica importante utilizada ampliamente; está basada en la similitud matemática entre la Ley de Darcy, que describe el flujo en un medio poroso y la Ley de Ohm que describe el flujo de carga en un conductor. En el caso de un modelo

de no-equilibrio, depende también de la similitud entre la relación de carga y almacenamiento del agua subterránea y la ecuación que describe la acumulación de carga en un condensador; de la similitud entre el principio de continuidad eléctrica, incluyendo la conservación de la carga eléctrica y la ecuación de continuidad que describe la conservación de la materia.

1.

La Ley de Ohm expresa que la corriente eléctrica en un elemento conductor es directamente proporcional a la diferencia de voltaje, o diferencia de potencial de sus extremos. La figura representa un elemento conductor, o una resistencia con una diferencia de voltaje de $\phi_1 - \phi_2$. Es decir, el voltaje de un extremo de la resistencia es ϕ_1 , mientras que el otro es ϕ_2 . La corriente a través de la resistencia se define como la rapidez neta de movimiento de la carga positiva a través del plano transversal, tomado en posición normal a la dirección de flujo de la carga dentro de la resistencia. La unidad clásica de la carga es el culombio, y la corriente es normalmente medida como el número de culombios por segundo que atraviesan el plano en consideración. Un flujo de carga de 1 culombio por segundo se designa como 1 amperio. El símbolo es I y se utiliza para representar la corriente

Símbolo que representa un elemento conductor, o resistencia



R representa el valor de la resistencia (ohmios)

Para la resistencia mostrada en el diagrama, la Ley de Ohm puede expresarse como sigue:

$$I = \frac{1}{R} (\phi_1 - \phi_2),$$

donde I es la corriente de la resistencia y $\phi_1 - \phi_2$, como se indicó anteriormente, es la diferencia de voltaje entre los extremos. El término $1/R$ es la constante de proporcionalidad que relaciona la corriente al voltaje; R se denomina la resistencia del elemento. Esta constante depende tanto de las dimensiones del elemento como de las propiedades eléctricas del material usado como conductor. La unidad de resistencia es el ohm. Una resistencia de 1 ohm producirá 1 amperio de corriente conforme a una diferencia de voltaje de 1 voltio.

PREGUNTA

Supongamos que el voltaje de una terminal de una resistencia de 500 ohmios es de 17 voltios y el voltaje del otro extremo es de 12 voltios, ¿cuál será la corriente en la resistencia?

Pase a la Sección

| | |
|----------------------------------|----|
| 10 amperios | 19 |
| 0.10 amperio, ó 100 miliamperios | 8 |
| 0.01 amperio, ó 10 miliamperios | 6 |

2.

Su respuesta en la Sección 22 es incorrecta. La forma diferencial finita de la ecuación para flujo bidimensional de no-equilibrio de agua subterránea es

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0 = \frac{Sa^2}{T} \frac{\Delta h_0}{\Delta t},$$

mientras que la ecuación para nuestra red resistencia-capacitancia es

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0 = RC \frac{d\phi_0}{dt}.$$

La comparación de estas ecuaciones ilustra que la resistencia, R , puede ser considerada como análoga al término, $1/T$; el voltaje ϕ , es análogo a la carga, h ; y la capacitancia, C , puede ser considerada análoga al término, Sa^2 .

En la respuesta que eligió, el voltaje es considerado como análogo a la transmisividad, por lo tanto el procedimiento indicaría que el voltaje aumenta en áreas de alta transmisividad.

Regrese a la Sección 22 y elija otra respuesta.

3.

Su respuesta en la Sección 6,

$$I = \frac{A}{RL} (\phi_1 - \phi_2),$$

es incorrecta. La idea aquí es obtener una expresión para la corriente, la cual involucra la resistividad del material, ρ_e , que compone la resistencia. Su respuesta incluye la resistencia, R , en vez de la resistividad. De todos modos no es

una expresión válida para la Ley de Ohm pues la Ley de Ohm en términos de resistencia se presentó en la Sección 1 como

$$I = \frac{1}{R} (\phi_1 - \phi_2).$$

Regrese a la Sección 6 y elija otra respuesta.

4.

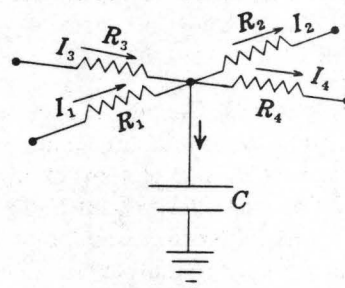
Su respuesta en la Sección 9,

$$\frac{1}{R} (\phi_1 - \phi_c) = C \frac{d\phi_c}{dt},$$

es correcta. La cantidad C , tal como se ha visto es en realidad la derivada de $d\epsilon/d\phi_c$; por lo tanto, $C(d\phi_c/dt)$ es equivalente a $(d\epsilon/d\phi_c) \cdot (d\phi_c/dt)$, o simplemente $d\epsilon/dt$.

Sin referirnos a C explícitamente, hicimos uso en la Sección 9 de un equivalente eléctrico a la ecuación hidráulica de continuidad. En un circuito eléctrico, la carga se conserva en la misma forma que la masa del fluido es conservada en un sistema hidráulico. La Ley de Kirchhoff para la corriente, muy familiar a estudiantes de física elemental es una expresión de este principio. En el circuito de la Sección 9, requerimos que la rapidez de acumulación de carga en el condensador sea igual a la rapidez con la cual la carga

se transporta a la placa del condensador a través de la resistencia—es decir, a la corriente a través de la resistencia. En el circuito mostrado en la figura, en el cual cuatro resistencias se co-



nectan a un solo condensador, el flujo neto de *entrada de carga menos la descarga*, a través de las cuatro resistencias, debe ser igual a la rapidez de acumulación de carga sobre el condensador.

Con.—4.

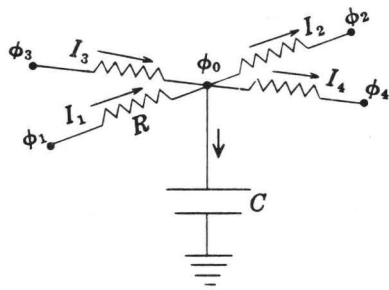
Digamos que I_1 y I_3 representan corrientes hacia el condensador a través de las resistencias R_1 y R_3 ; y digamos que I_2 y I_4 representan corrientes que se alejan del condensador a través de las resistencias R_2 y R_4 . Entonces, la proporción de flujo de entrada de carga, hacia el condensador, será $I_1 + I_3$; la proporción de flujo de salida fuera del condensador, será $I_2 + I_4$. La resultante neta del flujo de entrada menos el de salida, será $I_1 - I_2 + I_3 - I_4$; y deberá igualar la rapidez de acumulación de carga en el condensador. Es decir, debemos tener

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = \frac{d\epsilon}{dt}.$$

PREGUNTA

El diagrama muestra otra vez el circuito descrito anteriormente, pero ahora asumimos que las cuatro resistencias son iguales —es decir, asumimos que

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R.$$



Digamos que ϕ_0 representa el voltaje en la placa del condensador—esto es esencialmente igual al voltaje en el punto de unión de las cuatro resistencias (la resistencia del alambre que conecta el condensador al punto de unión de las resistencias se asume ser insignificante). El voltaje en los extremos de las cuatro resistencias se designa como ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , y ϕ_4 , como se muestra en el diagrama. Si se aplica la Ley de Ohm para obtener una expresión para la corriente a través de cada resistencia y se aplica la ecuación del condensador para obtener una expresión para la rapidez de acumulación de carga en el condensador, ¿cuál de las siguientes ecuaciones se obtendrá para nuestra ecuación en el circuito

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = \frac{d\epsilon}{dt}?$$

Pase a la Sección

$$\frac{\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4}{R} = C \frac{d\phi_0}{dt} \quad 15$$

$$\frac{1}{C} (\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 + \phi_0) = R \frac{d\phi_0}{dt} \quad 27$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0 = RC \frac{d\phi_0}{dt} \quad 22$$

5.

Su respuesta en la Sección 22 es correcta. Evidentemente, esta es una indicación del poder del método analógico por el cual los problemas que incluyen acuíferos heterogéneos se pueden resolver tan fácilmente como aquellos en acuíferos uniformes. También se pueden introducir condiciones límites complejas, y problemas tridimensionales se podrían analizar construyendo redes de varias capas. El método es aplicable a acuíferos libres y confinados siempre y cuando el agotamiento sea menor en

relación al espesor de saturación total. Se han hecho algunas simulaciones con éxito para casos en los cuales estas condiciones no se satisfacen, utilizando componentes eléctricos especiales los cuales varían en resistencia a medida que el voltaje cambia.

Problemas de estado permanente se resuelven algunas veces por redes de modelos construidos únicamente de resistencias, —es decir, que no se toman en cuenta los condensadores—, en vez de por analogías construidas de un material con-

5. — Con.

ductor continuo. Estas redes de estado permanente son particularmente útiles cuando se toma en cuenta la heterogeneidad.

En algunos casos, la simetría del sistema de aguas subterráneas puede ser tal que una analogía de dos dimensiones en un plano vertical—es decir, que representa una sección vertical de uno o varios acuíferos—puede ser más útil que una analogía de dos dimensiones que representa una perspectiva plana. En este tipo de modelo, la anisotropía es frecuentemente un factor; es decir, permeabilidad en la dirección vertical es frecuentemente menor que aquella en la dirección lateral. Esto es muy fácil acomodar en la red utilizando altas resistencias en la dirección vertical o igualmente, utilizando un valor con resistencia uniforme y alterando la escala del modelo, para que el valor de la resistencia se use para simular diferentes distancias y secciones de áreas de flujo en las dos direcciones.

Un tipo importante y especial de red análoga es el utilizado para simular condiciones en un plano vertical alrededor de un solo pozo de descarga. La simetría cilíndrica del problema del pozo de descarga es de por sí, parte de la red; la resistencia y escalas del modelo se elijen de tal

forma como para simular el aumento del área en la sección de flujo, tanto vertical como radial, el cual ocurre en el acuífero al aumentar la distancia radial al pozo.

Así concluye nuestro análisis del método de aproximación de analogías eléctricas. Se ha presentado aquí un breve resumen de algunos de los principios más importantes. Esta técnica sirve para dar una idea de la operación de los sistemas muy complejos de las aguas subterráneas. Otros análisis de los principios de simulación pueden encontrarse en el texto de Karplus (1958). El libro "Conceptos y Modelos en Hidrología de Aguas Subterráneas" por Doménico (1972) contiene un análisis de las aplicaciones de las técnicas analógicas a las aguas subterráneas, así como el texto "Evaluación de los Recursos Hídricos" por Walton (1970). Más información puede encontrarse en trabajos de Skibitze (1960), Brown (1962), Stallman (1936b), Patten (1965), Bedinger, Reed y Swafford (1970) y muchos otros.

Aquí concluye el estudio presentado en este texto.

6.

Su respuesta en la Sección 1 es correcta. La resistencia de un elemento eléctrico se obtiene por la fórmula

$$R = \rho_e \cdot \frac{L}{A},$$

donde L es la longitud del elemento en la dirección de la corriente, A es la sección normal a la dirección, y ρ_e es la *resistividad* eléctrica del material del cual se compone la resistencia. El inverso de la resistividad se denomina como la conductividad del material; se designa frecuentemente como σ ; esto es $\sigma = 1/\rho_e$. La resistividad y la conductividad por lo general se consideran características constantes de un material en particular; sin embargo, estas propiedades varían con la temperatura y la relación linear comúnmente cesa en los extremos del voltaje. Aún más, un pequeño cambio en la com-

posición del material puede producir un cambio grande en las propiedades eléctricas. La resistividad es comúnmente expresada en unidades de ohm-metro²/metro, ó ohm-metros. Con esta unidad de la resistividad, la fórmula

$$R = \rho_e \cdot \frac{L}{A},$$

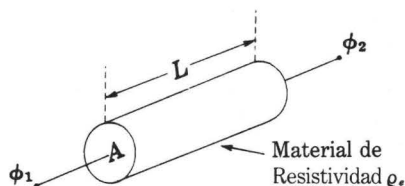
producirá la resistencia en ohmios si la longitud se expresa en metros y el área en metros cuadrados.

PREGUNTA

El gráfico muestra una resistencia de área seccional A y longitud L , compuesto por material de resistencia ρ_e . La diferencia en potencial a través de la resistencia es $\phi_1 - \phi_2$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es una expresión válida de la Ley de Ohm, que presenta la corriente a través de la resistencia?

Con.—6.

Pase a la Sección



$$I = \frac{A}{\rho_e L} (\phi_1 - \phi_2) \quad 28$$

$$I = \frac{\rho_e A}{L} (\phi_1 - \phi_2) \quad 24$$

$$I = \frac{A}{RL} (\phi_1 - \phi_2) \quad 3$$

7.**Su respuesta en la Sección 28,**

$$Q = \frac{K}{A_p} \cdot \frac{L_p}{h_1 - h_2},$$

es incorrecta. La Ley de Darcy expresa que el flujo es directamente proporcional al área de sección transversal y a la gradiente de carga

(negativa). En la respuesta que usted eligió el flujo se presenta como inversamente proporcional a la sección y proporcional al término $L_p/h_1 - h_2$, el cual es en realidad la inversa de la gradiente de carga negativa.

Regrese a la Sección 28 y elija otra respuesta

8.

Su respuesta en la Sección 1 es incorrecta. La Ley de Ohm se presentó como

$$I = \frac{1}{R} (\phi_1 - \phi_2),$$

y el análisis mostró que la resistencia de 1 ohm puede llevar una corriente de 1 amperio bajo la diferencia potencial de 1 voltio. Por lo tanto,

cuando la diferencia de voltaje se expresa en voltios y la resistencia en ohmios, el cociente

$$\frac{\phi_1 - \phi_2}{R}$$

dará la corriente correcta en amperios.

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

9.

Su respuesta en la Sección 21 es correcta. Si controlamos el voltaje en una placa de condensador en un circuito particular y observamos que cambia con el tiempo, sabemos por las relaciones presentadas en la Sección 21 que a medida que pasa el tiempo, la carga se acumula en la placa del condensador. Una expresión para la proporción a la cual la carga es acumulada puede obtenerse dividiendo la ecuación del condensador por un incremento de tiempo, Δt . Esto da

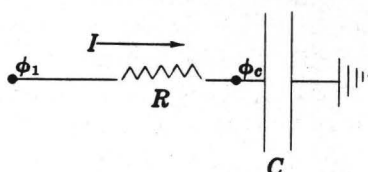
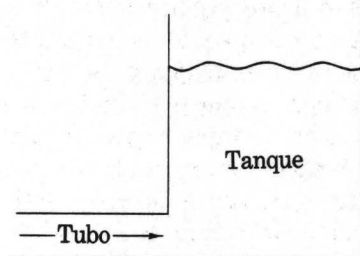
$$\frac{\Delta \epsilon}{\Delta t} = C \frac{\Delta \phi}{\Delta t},$$

ó en términos de derivadas,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = C \frac{d\phi}{dt}.$$

La figura muestra un sistema hidráulico análogo eléctrico. La razón de acumulación del fluido en el tanque es igual a la razón de flujo de agua a través del tubo que abastece. De igual manera, la razón de acumulación de carga en la placa del condensador es igual a la razón de flujo de carga a través de la resistencia conectada a la placa. Esta razón de flujo de carga es por

9.—Con.



definición la corriente a través de la resistencia. (Recuerde que las unidades de la corriente son carga/tiempo—por ejemplo, culombios/segundo). Además tenemos

$$I = \frac{d\epsilon}{dt},$$

donde I es la corriente a través de la resistencia, y $d\epsilon/dt$ es la rapidez con la cual la carga se acumula en el condensador.

PREGUNTA

Supongamos que el voltaje en el extremo izquierdo de la resistencia es ϕ_1 , mientras que el voltaje en el otro extremo, el cual es esencialmente el voltaje en la placa del condensador, es ϕ_c . Si utilizamos la Ley de Ohm para obtener una expresión para I , en términos de voltaje y de la ecuación para el condensador para obtener una expresión para $d\epsilon/dt$, ¿cuál de las siguientes relaciones se obtendrá? (R indica la resistencia y C la capacitancia).

Pase a la Sección

$$\frac{1}{R}(\phi_1 - \phi_c) = C \frac{d\phi_c}{dt} \quad 4$$

$$R(\phi_c - \phi_1) = C \frac{d\phi_c}{dt} \quad 20$$

$$RC(\phi_c - \phi_1) = \frac{d\phi_c}{dt} \quad 18$$

10.

Su respuesta en la Sección 21 es incorrecta. La ecuación que desarrollamos para el condensador era

$$C = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\phi},$$

donde C es la capacitancia, $\Delta\epsilon$ la cantidad de carga depositada en el almacenamiento en el condensador, y $\Delta\phi$ el aumento en la diferencia de voltaje a través de las placas del condensador, observado a medida que la carga $\Delta\epsilon$ se acumula. Para el prisma de acúfero utilizado en el desarrollo de las ecuaciones de aguas subterráneas en la Parte V, teníamos

$$\Delta V = SA\Delta h,$$

donde ΔV era el volumen de agua almacenada en el prisma, Δh el aumento de carga relacionado con esta acumulación en el depósito, S el coeficiente de almacenamiento, y A el área base del prisma. Esta ecuación puede ser reformulada como

$$SA = \frac{\Delta V}{\Delta h}$$

para facilitar su comparación con la ecuación del condensador.

Regrese a la Sección 21 y elija otra respuesta.

11.

Su respuesta en la Sección 26 es correcta. Observe que esta ecuación

$$\frac{I}{w \cdot b} = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

es análoga a la ecuación que escribíamos para el componente del caudal específico en la dirección x , a través de una sección del acuífero de ancho w y espesor b ; es decir,

$$\frac{Q}{w \cdot b} = -K \frac{\partial h}{\partial x}.$$

En la práctica, el trabajo de la analogía eléctrica en estado permanente puede ser llevado a cabo construyendo un modelo a escala de un acuífero de un material conductivo y aplicando las condiciones límites eléctricas similares a las condiciones límites hidráulicas que prevalecen en el sistema de aguas subterráneas. El voltaje se controla en ciertos puntos o a lo largo de ciertos límites del modelo, en proporción a valores de carga en los puntos correspondientes en el

acuífero y la corriente podrá ser introducida o extraída en proporciones para valores conocidos de flujo de entrada y de salida del acuífero. Cuando las condiciones límites se aplican en esta forma, los voltajes en varios puntos del modelo son proporcionales a las cargas que corresponden a los puntos en el acuífero, y el vector de densidad de corriente en varias secciones del modelo es proporcional al vector del caudal específico en las secciones correspondientes al acuífero.

PREGUNTA

Supongamos que se establece un experimento análogo de este tipo, y se traza en el modelo una línea a lo largo de la cual se tiene un valor constante en el voltaje. ¿A cuál de las siguientes características hidrológicas correspondería esta línea?

Pase a la Sección

| | |
|--------------------------------|----|
| una línea de flujo | 16 |
| una línea de carga constante | 21 |
| una línea de descarga uniforme | 17 |

12.

Su respuesta en la Sección 28,

$$Q = -K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} A_p,$$

es incorrecta. La Ley de Darcy expresa que el flujo es igual al producto de la conductividad hidráulica, área de sección transversal y gradiente de carga (negativa). La gradiente de

carga es por definición una primera derivada —la derivada de carga con respecto a la distancia. La respuesta que usted eligió incluye una segunda derivada. La respuesta correcta debe incluir ya sea la primera derivada, o una expresión equivalente o aproximada a la primera derivada.

Regrese a la Sección 28 y elija otra respuesta.

13.

Su respuesta en la Sección 21 es incorrecta. Hemos visto al tratar la analogía entre flujo eléctrico en estado permanente y flujo de aguas subterráneas en estado permanente, que el voltaje es análogo a la carga hidráulica mientras que la corriente o rapidez de flujo de descarga es análoga a la proporción volumétrica del flujo del fluido. En la analogía entre la ecuación del condensador y la relación carga-almacenamiento, el voltaje aún debe ser análogo a la carga, o condensadores no podrían ser usados para

representar el almacenamiento en un modelo que incorpore la analogía del flujo entre las leyes de Darcy y Ohm. Similarmente, la carga debe representar el volumen del fluido para que la rapidez del flujo de descarga (corriente) pueda representar la descarga volumétrica del fluido. De lo contrario, la analogía almacenamiento-capacitancia sería incompatible con la analogía del flujo.

Regrese a la Sección 21 y elija otra respuesta.

14.

Su respuesta en la Sección 22 es incorrecta. Aumentando tanto R como C , como se sugiere en la respuesta que usted eligió, causa el aumento del factor RC en la ecuación

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0 = RC \frac{d\phi_0}{dt}$$

Por otra parte, un aumento en T en el acuífero ocasiona una disminución del factor Sa^2/T , en la ecuación

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0 = \frac{Sa^2}{T} \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

Por lo tanto, la técnica propuesta no se adapta para simular el sistema hidrológico.

Observe que la carga y el voltaje son análogos y que el aumento en T puede ser simulado por disminución en R .

Regrese a la Sección 22 y elija otra respuesta.

15.

Su respuesta en la Sección 4 es incorrecta. La rapidez de acumulación de carga en la placa del condensador debe ser igual a la proporción neta a la cual la carga es transportada al condensador a través de las 4 resistencias. Para plantear el problema, asumimos que la corriente se dirige hacia el condensador en las resistencias 1 y 3, y que la corriente se aleja del condensador en las resistencias 2 y 4 tal como se muestra en el diagrama. La corriente hacia el condensador en la resistencia 1 se obtiene por la Ley de Ohm como

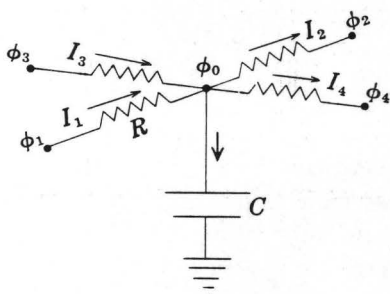
$$I_1 = \frac{1}{R} (\phi_1 - \phi_0),$$

mientras que la resistencia 3 se obtiene por

$$I_3 = \frac{1}{R} (\phi_3 - \phi_0).$$

La corriente que se aleja del condensador en la resistencia 2 se obtiene por

$$I_2 = \frac{1}{R} (\phi_0 - \phi_2),$$



mientras que en la resistencia 4 se obtiene por

$$I_4 = \frac{1}{R} (\phi_0 - \phi_4).$$

Si ocurre que estas corrientes no están en realidad en las direcciones inicialmente asumidas, el valor de la corriente así computada será negativo; entonces, el uso de estas expresiones es algebraicamente correcto, independientemente a la veracidad de las suposiciones de la dirección de la corriente.

La proporción neta de transporte de la carga hacia el condensador será la suma del flujo de entrada de las corrientes menos la suma del de salida, o

$$I_1 + I_3 - I_2 - I_4.$$

Este término deberá ser igual a la proporción de acumulación de la carga en la placa del condensador, $d\epsilon/dt$,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = C \frac{d\phi_0}{dt}.$$

Es decir, que debemos tener

$$I_1 + I_3 - I_2 - I_4 = C \frac{d\phi_0}{dt}.$$

La respuesta correcta a la pregunta de la Sección 4 puede obtenerse sustituyendo nuestras expresiones por I_1 , I_2 , I_3 y I_4 , en estas ecuaciones y reorganizando el resultado.

Regrese a la Sección 4 y elija otra respuesta

16.

Su respuesta en la Sección 11 es incorrecta.

En flujos bidimensionales de estado permanente, se puede especificar una función constante a lo largo de la línea de flujo. Sin embargo, esta función—denominada función de la corriente—no es análoga al voltaje (potencial) en la teoría eléctrica; por lo tanto, una línea de flujo o una línea a lo largo de la cual la función de la corriente es constante, no puede corresponder a

un equipotencial, o línea a lo largo de la cual el voltaje es constante. Al desarrollar la analogía entre el flujo de la electricidad y el flujo del fluido a través de un medio poroso, insistimos en que el voltaje es análogo a la carga; la corriente es análoga a la descarga del fluido; y la conductividad eléctrica es análoga a la conductividad hidráulica.

Regrese a la Sección 11 elija otra respuesta.

17.

Su respuesta en la Sección 11 es incorrecta.

Las formas de las leyes de Darcy y Ohm que utilizamos para comparación se repiten a continuación:

La Ley de Darcy:

$$\frac{Q}{w \cdot b} = -K \frac{\partial h}{\partial x},$$

donde Q es la descarga volumétrica del fluido a través de la sección de ancho w y espesor b , tomado a ángulo recto a la dirección x ; K es la conductividad hidráulica, y $\partial h / \partial x$ es la derivada de la carga en la dirección x .

La ley de Ohm:

$$\frac{I}{w \cdot b} = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

donde I es la corriente a través de la sección de ancho w y espesor b , tomada a ángulo recto a la dirección x ; σ es la conductividad eléctrica, y $\partial \phi / \partial x$ es la derivada del voltaje o potencial en la dirección x .

Una comparación de estas ecuaciones muestra que el voltaje, o potencial ϕ , ocupa una posición en la teoría eléctrica exactamente paralela a la carga h , en la teoría del flujo de las aguas subterráneas. La corriente, I , es análoga a la descarga, Q ; mientras que, σ , la conductividad eléctrica es análoga a la conductividad hidráulica, K . Estas posiciones paralelas deben ser tomadas en cuenta para responder la pregunta de la Sección 11.

Regrese a la Sección 11 y elija otra respuesta.

18.

Su respuesta en la Sección 9 es incorrecta.

La pregunta se refiere a un condensador conectado a una resistencia. La idea es igualar la razón de acumulación de carga en la placa del condensador a la rapidez con la cual la carga se lleva al condensador a través de la resistencia—es decir, a la corriente a través de la resistencia. La rapidez con que la carga se acumula en la placa del condensador se obtiene por la ecuación del condensador como

$$\frac{d\epsilon}{dt} = C \frac{d\phi_0}{dt}.$$

La corriente a través de la resistencia, o la rapidez con que la carga fluye a través de la resistencia se obtiene por la Ley de Ohm como

$$I = \frac{1}{R} (\phi_1 - \phi_2).$$

Regrese a la Sección 9 y elija otra respuesta.

19.

Su respuesta en la Sección 1 es incorrecta. La Ley de Ohm se obtiene por

$$I = \frac{1}{R}(\phi_1 - \phi_2).$$

Si R está en ohmios y la diferencia $\phi_1 - \phi_2$ está en

voltios, la corriente, I , estará en amperios. En el ejemplo presentado, $\phi_1 - \phi_2$ era de 5 voltios y R era de 500 ohmios. Sustituya estos valores en la ecuación para obtener la cantidad de corriente a través de la resistencia.

Regrese a la Sección 1 y elija otra respuesta.

20.

Su respuesta en la Sección 9,

$$R(\phi_0 - \phi_1) = C \frac{d\phi_c}{dt},$$

es incorrecta. La razón de acumulación de la carga en el condensador, $d\epsilon/dt$, es igual a $C(d\phi_c/dt)$, y esta parte de su respuesta es correcta. Sin embargo, el propósito es igualar esta proporción de acumulación de carga en el condensador a la rapidez de transporte de la carga hacia el condensador, a través de la resisten-

cia—es decir, a la corriente a través de la resistencia. Esta corriente se debe expresar en términos de resistencia y voltaje utilizando la Ley de Ohm; esto es lo que no se hizo correctamente en la respuesta que eligió. La Ley de Ohm expresa que la corriente a través de una resistencia es igual a la disminución del voltaje a través de la resistencia dividida por el valor de la resistencia en ohmios.

Regrese a la Sección 9 y elija otra respuesta.

21.

Su respuesta en la Sección 11 es correcta. La línea de voltaje constante, o línea equipotencial, es análoga a la línea de carga constante en la hidráulica de aguas subterráneas.

La analogía entre la Ley de Darcy y la Ley de Ohm constituye la base para usar el modelaje de la analogía eléctrica de estado permanente. En los últimos años, el modelaje de flujo de no-equilibrio ha llegado a ser cada vez más importante y tal como la Ley de Darcy es inadecuada para describir flujo de no-equilibrio de aguas subterráneas, su analogía con la Ley de Ohm es en sí misma una base inapropiada para el modelaje de no-equilibrio. La teoría del flujo de no-equilibrio se basa en la combinación de la Ley de Darcy con la ecuación de almacenamiento, por medio de la ecuación de continuidad. Para extender el modelaje análogo a esos de flujo de no-equilibrio, requerimos ecuaciones eléctricas análogas a las ecuaciones de almacenamiento y continuidad.

La analogía del almacenamiento de aguas subterráneas se representa por un elemento

eléctrico conocido como un condensador. El condensador es esencialmente un tanque de almacenamiento de carga eléctrica; en el diagrama de circuitos se indica con el símbolo mostrado en la Fig. A. Como el símbolo mismo sugiere, los condensadores pueden ser contruidos insertando dos placas paralelas de material conductor dentro del circuito, como se muestra en la figura B. Cuando se cierra el circuito, la carga positiva fluye de la batería a la placa superior y se acumula de una manera análoga a la acumulación de agua en el tanque. Al mismo tiempo, la carga positiva es extraída de la placa interior, dejándola con una carga negativa. La Figura C muestra un circuito hidráulico análogo a este simple circuito del condensador; cuando se abre la válvula, la bomba expulsa agua al tanque de la izquierda, drenando el tanque de la derecha. Si este último se conecta a una fuente continua de agua, como se muestra en la Figura D, tanto el volumen de agua como el nivel de agua en el tanque de la derecha permanecerán esencialmente constantes, mientras que el agua

Con.—21.

Figura A



Figura B

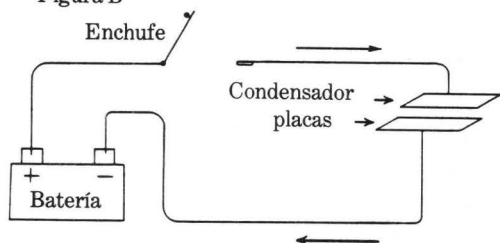


Figura C

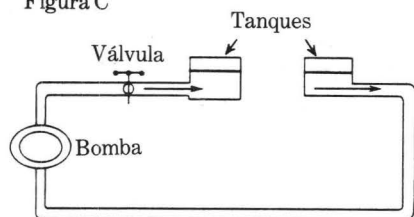


Figura D

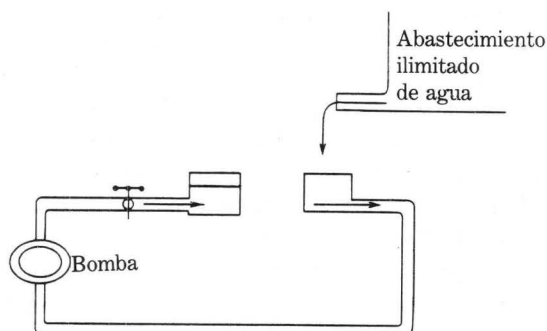
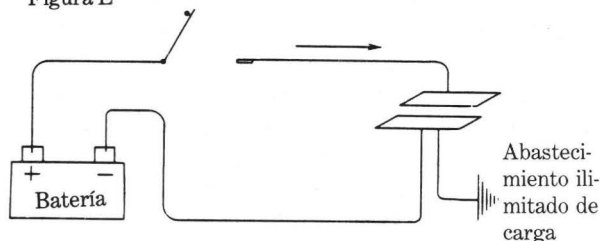


Figura E



continuará acumulándose en el tanque de la derecha, mientras la bomba opere. El ordenamiento eléctrico análogo se muestra en la figura E; aquí el símbolo adicional mostrado, adyacente a la placa inferior, indica que esta placa ha sido conectada a tierra; es decir, conectada a una masa extensa de metal enterrada, que en realidad constituye una reserva ilimitada de carga. En esta situación, la cantidad de carga en la placa inferior permanece básicamente constante, como lo hace el voltaje en esta placa, pero la batería aún produce carga positiva para acumular en la placa superior. El voltaje en la placa inferior es análogo al nivel de agua en el tanque de la derecha, el cual se mantiene constante por el abastecimiento ilimitado de agua.

En un circuito, tal como el que se muestra en la figura E, es común designar el voltaje constante de la placa de tierra como cero. Esto se hace en forma arbitraria. Es equivalente, por ejemplo, atribuirle una carga cero al nivel constante de agua en el tanque de la derecha en la Figura D. Con el voltaje de la placa de tierra igual a cero, la diferencia de voltaje, entre las placas llega a ser simplemente el voltaje ϕ , medido en la placa superior. En el circuito de la Figura E, este voltaje es igual al voltaje producido por la batería.

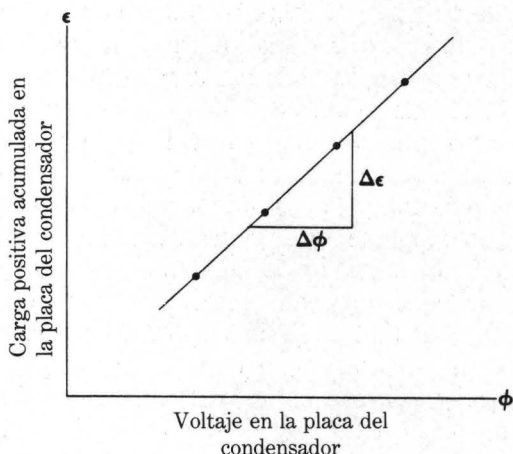
Supongamos que se realiza un experimento en el cual la batería de la figura E es reemplazada por baterías de más alto voltaje. Para cada paso, la carga en la placa positiva se mide después que el circuito ha alcanzado equilibrio. El resultado mostrará que cuando se aumenta el voltaje aplicado, la carga que se acumula en la placa positiva aumentará en proporción directa. Si se construye un gráfico de los datos experimentales entre la carga acumulada en la placa positiva ϵ , y el voltaje en cada paso, el resultado será una línea recta como se muestra en la figura. La pendiente de esta línea, $\Delta\epsilon/\Delta\phi$, se denomina la capacitancia del condensador y se designa como C ; es decir,

$$C = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\phi}, \quad C = \frac{d\epsilon}{d\phi},$$

o simplemente

$$C = \frac{\epsilon}{\phi}.$$

21.—Con.



La capacitancia se mide en faradios, o más comúnmente en microfaradios; un faradio es igual a un culombio por voltio.

Estas ecuaciones sirven para definir la operación de un condensador y proporcionan la analogía requerida para la ecuación de almacenamiento de las aguas subterráneas. Se debe recordar que la relación entre el volumen en almacenamiento y la carga puede escribirse

$$\Delta V = S \cdot A \cdot \Delta h,$$

donde ΔV es el volumen de agua introducido o extraído del almacenamiento de un prisma del acuífero de área de base A , cuando la carga cambia por una cantidad Δh .

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones describe correctamente la analogía entre la ecuación del condensador y la relación almacenamiento-carga en aguas subterráneas?

Pase a la Sección

La carga eléctrica es igual a la carga hidráulica, voltaje análogo al volumen de agua, y capacitancia, C , análoga al factor SA .

13

La carga eléctrica es análoga al volumen del agua, el voltaje es análogo a la carga hidráulica, y la capacitancia, C , es análoga al factor SA .

9

La carga eléctrica es análoga al volumen de agua, el voltaje es análogo a la carga hidráulica, y la capacitancia, C , es análoga al factor

$$\frac{1}{SA}.$$

10

22.

Su respuesta en la sección 4,

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0 = RC \frac{d\phi_0}{dt},$$

es correcta. En la Parte VIII, obtuvimos una aproximación en diferencias finita a la ecuación diferencial para flujo de aguas subterráneas bidimensional no permanente

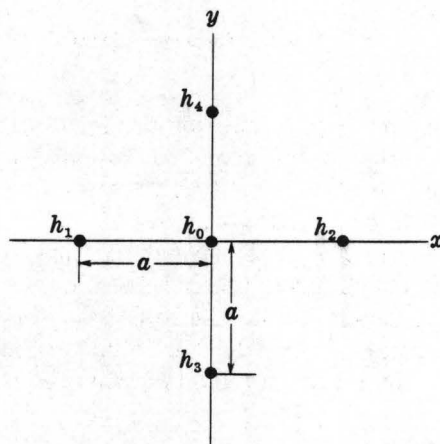
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Esta aproximación puede escribirse

$$\frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0}{a^2} = \frac{S}{T} \frac{\Delta h_0}{\Delta t},$$

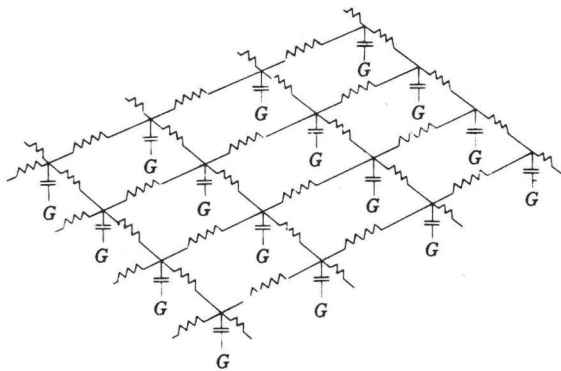
6

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0 = \frac{Sa^2}{T} \frac{\Delta h_0}{\Delta t},$$



Con.—22.

donde h_0, h_1, h_2, h_3 , y h_4 representan los valores de carga en los nodos de una red tal como la que se muestra en el gráfico; a es el espaciamiento nodal, S es el coeficiente de almacenamiento, T es la transmisividad, y $\Delta h_0/\Delta t$ representa la proporción de cambio de la carga en el punto central. La ecuación del circuito que acabamos de obtener es directamente análoga a la forma diferencial finita de la ecuación de las aguas subterráneas, excepto por el uso de la notación de la derivada de tiempo $d\phi_0/dt$ en vez de la forma diferencial finita $\Delta h_0/\Delta t$. En otras palabras, el circuito compuesto de cuatro resistencias y el condensador, se comporta en aproximadamente la misma forma como el prisma del acuífero confinado, el cual fue utilizado en el desarrollo de las ecuaciones de aguas subterráneas. Por consiguiente una red compuesta de circuitos de este tipo, tales como los mostrados en la figura se deben comportar



G indica descarga a tierra

en la misma forma que un acuífero bidimensional confinado de geometría similar. El comportamiento de no-equilibrio de tales acuíferos podría ser estudiado construyendo un modelo del acuífero, que constituya de en una red de este tipo; condiciones límites eléctricas similares a las condiciones límites hidráulicas observadas se imponen en el modelo, y el voltaje se controla en varios puntos de la red en función del tiempo.

Las lecturas del voltaje constituyen, en efecto, una solución diferencial finita a la ecuación diferencial describiendo la carga en el acuífero. La escala de tiempo de estos modelos es muy diferente a la utilizada en régimen hidráulico. Una práctica común es utilizar una escala de tiempo corta, en la cual meros milisegundos del modelo representan meses en el sistema hidrológico. Cuando se emplea este rango de escalas de tiempo, las excitaciones eléctricas, o condiciones límites se aplican repetidamente a cierta frecuencia, y la respuesta del sistema se controla utilizando osciloscopios. Esta frecuencia de cada osciloscopio se sincroniza con la frecuencia de repetición de los aportes de las condiciones límites, así que los trazos de los osciloscopios representan una curva de voltaje, o de carga versus tiempo, en el punto de la red en el cual el instrumento ha sido conectado.

PREGUNTA

Supongamos que modelamos un acuífero en el cual la transmisividad varía de un área a otra, mientras que el coeficiente de almacenamiento permanece esencialmente constante a través del acuífero. ¿Cuál de los siguientes procedimientos consideraría un método aceptable de simulación de estas condiciones en una red análoga de resistencia-capacitancia?

Pase a la Sección

Construir una red usando valores uniformes de resistencia y capacitancia, pero aplicada proporcionalmente a voltajes altos en áreas con alta transmisividad. 2

Construir una red en la cual la resistencia y la capacitancia son ambas aumentadas en proporción al aumento local en la transmisividad. 14

Construir una red en la cual la resistencia varía inversamente con la transmisividad a ser simulada, mientras que la capacitancia se mantiene con un valor uniforme a través de la red. 5

23.

Su respuesta en la Sección 26,

$$\frac{I}{w \cdot l} = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

es incorrecta. La respuesta que escogió expresa en realidad, el componente de densidad de la corriente en la dirección z . $w \cdot l$ es un área tomada normal a la dirección z . Si I representa la corriente a través de esta área, $I/w \cdot l$ dará el componente de la densidad de la corriente en la

dirección z y esto deberá ser igual a $-\sigma$ multiplicado por la derivada direccional del voltaje en la dirección z , $\partial \phi / \partial z$. Sin embargo, la pregunta pedía el componente de la densidad de la corriente en la dirección x ; y en efecto, el problema expresa que el flujo de la corriente era de dos dimensiones confinado al plano x, y . Esto implica que el componente de la corriente en la dirección vertical es cero, y que $\partial \phi / \partial z$ es también cero.

Regrese a la Sección 26 y elija otra respuesta.

24.

Su respuesta en la Sección 6 es incorrecta. La Ley de Ohm se presentó en la Sección 1 como

$$I = \frac{1}{R}(\phi_1 - \phi_2),$$

donde $\phi_1 - \phi_2$ es la diferencia de voltaje a través de una resistencia, R , y I es la corriente a través de la resistencia. En la Sección 6 se presentó la expresión

$$R = \rho_e \cdot \frac{L}{A}$$

para la resistencia, donde ρ_e es la resistividad eléctrica del material del cual la resistencia se compone; L es la longitud de la resistencia, y A es el área de sección transversal. Esta expresión para la resistencia debería ser sustituida en la forma de la Ley de Ohm presentada anteriormente para obtener la respuesta correcta.

Regrese a la Sección 6 y elija otra respuesta.

25.

Su respuesta en la Sección 26,

$$\frac{I}{w \cdot l} = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

es incorrecta. El componente de la densidad de la corriente en una dirección particular se define como la carga a través de un área normal a esa dirección, en una unidad de tiempo. Aquí nos interesa el componente de la densidad de la corriente en dirección x ; por lo tanto, debemos usar el área en ángulo recto a la dirección x . En su

respuesta, el área es $w \cdot l$, normal a la dirección z . Nuevamente, el componente de la densidad de la corriente en una dirección particular es proporcional a la derivada direccional del voltaje en esa dirección. Debido a que estamos tratando con el componente de la densidad de la corriente en la dirección x , requerimos la derivada del voltaje en la dirección x . La respuesta que escogió usa, sin embargo, la derivada del voltaje con respecto a y .

Regrese a la Sección 26 y elija otra respuesta.

26.

Su respuesta en la Sección 28 es correcta.

y

El término

$$\frac{h_1 - h_2}{L_p},$$

es equivalente al valor negativo del gradiente de carga, $-\partial h/\partial x$, así que la formulación de la Ley de Darcy es equivalente a aquellas estudiadas previamente. Ahora, comparemos esta forma de la Ley de Darcy con la Ley de Ohm. Nuestra expresión para la Ley de Darcy era

$$Q = K \cdot \frac{h_1 - h_2}{L_p} \cdot A_p.$$

Nuestra expresión para la Ley de Ohm en términos de conductividad eléctrica fue

$$I = \sigma \cdot \frac{\phi_1 - \phi_2}{L} \cdot A.$$

En términos de resistividad eléctrica, obtuvimos

$$I = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\phi_1 - \phi_2}{L} \cdot A.$$

En esta forma, las cantidades análogas son fácilmente identificadas. El voltaje reemplaza a la carga, la corriente reemplaza el caudal del fluido y como se indicó en la sección anterior, σ , ó $1/\rho$, reemplaza la conductividad hidráulica. Además, indicamos que debido a que la corriente se define como la rapidez de movimiento de carga eléctrica a través de un plano, mientras que la descarga del fluido es la rapidez de transporte de volumen de fluido a través de algún plano, la carga eléctrica puede ser considerada análoga al volumen del fluido.

En la Parte II, observamos que la Ley de Darcy puede escribirse de una forma ligeramente diferente

$$q_x = \frac{Q_x}{A} = -K \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$q_y = \frac{Q_y}{A} = -K \frac{\partial h}{\partial y},$$

$$q_z = \frac{Q_z}{A} = -K \frac{\partial h}{\partial z},$$

donde, q_x es el componente del vector caudal específico en la dirección x , o de la descarga a través de un área a ángulo recto al eje de las x ; q_y es el componente del vector caudal específico en la dirección y , y q_z es el componente en la dirección z . Los tres componentes se suman vectorialmente para obtener la resultante del caudal específico. $\partial h/\partial x$, $\partial h/\partial y$, y $\partial h/\partial z$ son las derivadas direccionales de carga en las direcciones x , y , y z ; y K es la conductividad hidráulica, que se asume igual en cualquier dirección. Podemos, similarmente, escribir una forma más general de la Ley de Ohm, reemplazando el término $\phi_1 - \phi_2/L$ por las derivadas de voltaje con respecto a la distancia, y considerar componentes de la densidad de la corriente o corriente por unidad de área en las tres direcciones espaciales. Esto da

$$\left(\frac{I}{A}\right)_x = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\left(\frac{I}{A}\right)_y = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\left(\frac{I}{A}\right)_z = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Aquí $(I/A)_x$ es la corriente a través de una unidad de área orientada a un ángulo recto del eje x , $(I/A)_y$ es la corriente a través del área perpendicular al eje y y $(I/A)_z$ es la corriente a través del área perpendicular al eje z . Estos términos forman el componente del vector densidad de corriente. $\partial \phi/\partial x$, $\partial \phi/\partial y$, y $\partial \phi/\partial z$ son los gradientes del voltaje, en unidades de voltios/distancia, en las tres direcciones. Estas tres expresiones representan simplemente una generalización de las tres dimensiones de la ecuación presentada en la Sección 1 como la Ley de Ohm.

26.—Con.

PREGUNTA

El gráfico muestra un rectángulo en una lámina conductora en la cual existe un flujo bidimensional de electricidad. El flujo ocurre en el plano de la lámina; es decir, el plano x, y ; el espesor de la lámina es b y sus dimensiones son l y w . ¿Cuál de las siguientes expresiones produce la magnitud del componente de la densidad de corriente en la dirección x ?

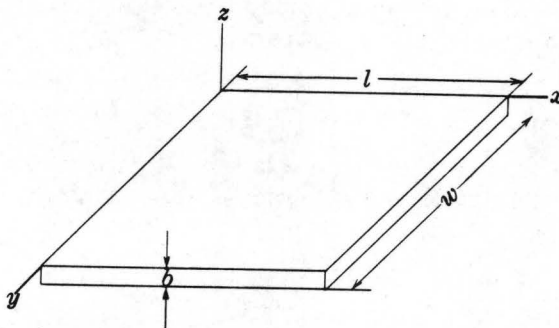
Pase a la Sección

$$\frac{I}{w \cdot b} = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad 11$$

$$\frac{I}{w \cdot l} = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad 25$$

$$\frac{I}{w \cdot l} = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad 23$$

(I representa la corriente a través del área utilizada en la ecuación, $w \cdot b$ ó $w \cdot l$).



27.

Su respuesta en la Sección 4 es incorrecta.

La idea importante aquí es que la razón de acumulación de carga en el condensador debe ser igual al flujo neto de entrada menos el flujo de salida de la carga a través de las 4 resistencias. La entrada de carga a través de la resistencia 1 es la corriente a través de esa resistencia y se obtiene en la Ley de Ohm como

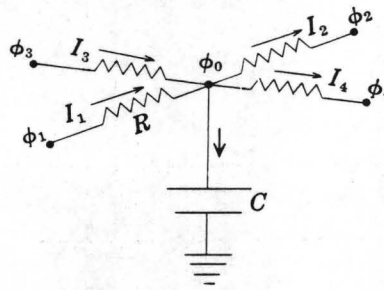
$$I_1 = \frac{1}{R}(\phi_1 - \phi_0).$$

El flujo de salida a través de la resistencia 2 se obtiene de una manera similar

$$I_2 = \frac{1}{R}(\phi_0 - \phi_2).$$

El flujo de entrada en la resistencia 3 es

$$I_3 = \frac{1}{R}(\phi_3 - \phi_0),$$



Con.—27.

mientras que el flujo de salida de la resistencia 4 es

$$I_4 = \frac{1}{R}(\phi_0 - \phi_4).$$

El flujo neto de entrada menos el de salida de carga al condensador es

$$I_1 + I_3 - I_2 - I_4,$$

el cual debe ser igual a la razón de acumulación de carga en el condensador, $d\epsilon/dt$; es decir,

$$I_1 + I_3 - I_2 - I_4 = \frac{d\epsilon}{dt}.$$

De acuerdo a la ecuación del condensador, $d\epsilon/dt$ se obtiene por

$$\frac{d\epsilon}{dt} = C \frac{d\phi_0}{dt}.$$

La respuesta a la pregunta de la Sección 4 puede ser obtenida substituyendo las expresiones apropiadas para I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , y $d\epsilon/dt$ en la relación

$$I_1 + I_3 - I_2 - I_4 = \frac{d\epsilon}{dt},$$

y reordenando el resultado.

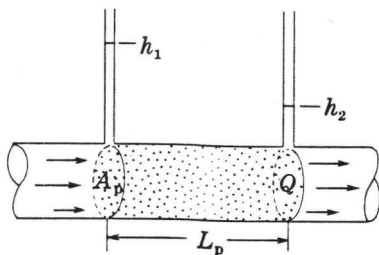
Regrese a la Sección 4 y elija otra respuesta.

28.

Su respuesta en la Sección 6 es correcta. Conductividad eléctrica o 1/resistividad es el equivalente eléctrico a la conductividad hidráulica. En términos de conductividad eléctrica, la Ley de Ohm para el problema de la Sección 6 llega a ser

$$I = \frac{\sigma A}{L}(\phi_1 - \phi_2),$$

donde σ es la conductividad eléctrica.



La analogía entre la Ley de Darcy y la Ley de Ohm se concibe fácilmente si consideramos el flujo de agua a través de un tubo lleno de arena, de longitud L_p y Sección A_p , como se muestra en la figura. La carga en el extremo de entrada de flujo en el tubo es h_1 , mientras que el otro extremo, que es el de salida, tiene una carga h_2 . La conductividad hidráulica de la arena es K .

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes expresiones se obtiene al aplicar la Ley de Darcy a este flujo? (Q representa la descarga a través del tubo).

Pase a la Sección

$$Q = -K \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cdot A_p \quad 12$$

$$Q = K \cdot \frac{h_1 - h_2}{L_p} \cdot A_p \quad 26$$

$$Q = \frac{K}{A_p} \cdot \frac{L_p}{h_1 - h_2} \quad 7$$

Referencias

- Bedinger, M. S., Reed, J. E., Wells, C. J., and Swafford, B. F., 1970, Methods and applications of electrical simulation in ground-water studies in the lower Arkansas and Verdigris River valleys, Arkansas and Oklahoma: U.S. Geol. Survey Water-Supply Paper 1971, 71 p.
- Boulton, N. S., 1954, The drawdown of the water table under nonsteady conditions near a pumped well in an unconfined formation: Proc. Civil Engineers (British), p. 564-579.
- Bredehoeft, J. D., and Pinder, G. F., 1970, Digital analysis of areal flow in multi-aquifer ground water systems: A quasi three-dimensional model: Water Resources Research, v. 6, no. 3, p. 883-888.
- Brown, R. H., 1962, Progress in ground water studies with the electric analog model: Am. Waterworks Assoc. Jour., v. 54, no. 8, p. 943.
- Cooper, H. H., 1966, The equation of ground water flow in fixed and deforming coordinates: Jour. Geophys. Research, v. 71, no. 20, p. 4785-4790.
- Cooper, H. H., Bredehoeft, J. D., and Papadopoulos, S. S., 1967, Response of a finite diameter well to an instantaneous charge of water: Water Resources Research, v. 3, no. 1.
- Cooper, H. H., and Jacob, C. E., 1946, A generalized graphical method of evaluating formation constants and summarizing well-field history: Am. Geophys. Union Trans., v. 27, no. 4, Aug. 1946, p. 526-534.
- Darcy, Henri, 1856, Les fontaines publiques de la ville de Dijon (The water supply of Dijon): Paris, Victor Dalmont, 647 p.
- Domenico, P. A., 1972, Concepts and models in ground water hydrology: New York, McGraw-Hill Book Co., 405 p.
- Dupuit, Jules, 1863, Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes (Theoretical and practical studies on the movement of running water): Paris, Carilion-Goery et V. Dalmont, 275 p.
- Ferris, J. G., 1959, Ground water, Chapter 6 in Wisler, C. O., and Brater, E. F., Hydrology (2d edition): New York, John Wiley and Sons.
- Ferris, J. G., and Knowles, D. B., 1963, The slug-injection test for estimating the transmissibility of an aquifer in Methods of determining permeability, transmissibility, and drawdown: U.S. Geol. Survey Water-Supply Paper 1536-I, 299 p.
- Ferris, J. G., Knowles, D. B., Brown, R. H., and Stallman, R. W., 1962, Theory of aquifer tests: U.S. Geol. Survey Water-Supply Paper 1536-E, 174 p.
- Forsythe, G. E., and Wasow, W. R., 1960, Finite difference methods for partial differential equations: New York, John Wiley and Sons.
- Freeze, R. A., 1971, Three-dimensional, transient, saturated-unsaturated flow in a ground water basin: Water Resources Research, v. 7, no. 2, p. 347-366.
- Hantush, M. S., 1959, Nonsteady flow to flowing wells in leaky aquifers: Jour. Geophys. Research, v. 64, no. 8, p. 1043.
- 1960, Modification of the theory of leaky aquifers: Jour. Geophys. Research, v. 65, no. 11, p. 3713-3725.
- 1967a, Flow of ground water in relatively thick leaky aquifers: Water Resources Research, v. 3, no. 2, p. 583.
- 1967b, Flow to wells in aquifers separated by a semipervious layer: Jour. Geophys. Research, v. 72, no. 6, p. 1709.
- Hantush, M. S., and Jacob, C. E., 1955, Nonsteady radial flow in an infinite leaky aquifer: Am. Geophys. Union Trans., v. 36, no. 1, p. 95.
- Hildebrand, F. B., 1968, Finite-difference equations and simulations: Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc., 338 p.
- Hubbert, M. K., 1940, The theory of ground-water motion: Jour. Geology, v. 48, no. 8, pt. 1, p. 785-944.
- Jacob, C. E., 1946, Radial flow in a leaky artesian aquifer: Am. Geophys. Union Trans., v. 27, no. 2, p. 198.
- 1950, Flow of ground water, Chapter 5 in Rouse, Hunter, Engineering Hydraulics: New York, John Wiley and Sons, 1039 p.
- 1963, Correction of drawdown caused by a pumped well tapping less than the full thickness of an aquifer in Methods of determining permeability, transmissibility, and drawdown: U.S. Geol. Survey Water-Supply Paper 1536-I, p. 272-282.
- Jacob, C. E., and Lohman, S. W., 1952, Nonsteady flow to a well of constant drawdown in an extensive aquifer: Am. Geophys. Union Trans., v. 33, no. 4, p. 559-569.
- Karplus, W. J., 1958, Analog simulation: New York, McGraw-Hill Book Co., 434 p.
- Lang, S. M., 1963, Drawdown patterns in aquifers having a straight line boundary in Shortcuts and special problems in aquifer tests: U.S. Geol. Survey Water-Supply Paper 1545-C.
- Muskat, M., 1937, The flow of homogeneous fluids through porous media: Ann Arbor, Mich., J. W. Edwards, Inc. [repr. 1946].

- Papadopoulos, S. S., and Cooper, H. H., 1967, Draw-down in a well of large diameter: *Water Resources Research*, v. 3, no. 1.
- Patten, E. P., 1965, Design, construction and use of electric analog models, in Wood, L. A., and Gabrysch, R. K., *Analog model study of ground water in the Houston District, Texas*: Texas Water Comm. Bull. 6508.
- Peaceman, D. W., and Rachford, H. H., 1955, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations: *Jour. Soc. Indust. Appl. Math.*, v. 3, no. 1, March, 1955.
- Pinder, G. F., and Bredehoeft, J. D., 1968, Applications of digital computer for aquifer evaluation: *Water Resources Research*, v. 4, no. 5, p. 1069-1093.
- Prickett, T. A., and Lonquist, G. C., 1971, Selected digital computer techniques for groundwater resource evaluation: *Illinois State Water Survey Bull.* 55, 62 p.
- 1973, Aquifer simulation model for use on disk supported small computer systems: *Illinois State Water Survey Circ.* 114, 21 p.
- Remson, Irwin, Appel, C. A., and Webster, R. A., 1965, Ground water models solved by digital computer: *Jour. Hydr. Div., Am. Soc. Civil Engineers*, v. 91, no. HY3, p. 133-147.
- Remson, Irwin, Hornberger, G. M., and Molz, F. J., 1971, *Numerical methods in ground water hydrology*: New York, Wiley Interscience Division, John Wiley and Sons, 389 p.
- Rubin, Jacob, 1968, Theoretical analysis of two-dimensional transient flow of water in unsaturated and partly unsaturated soils: *Soil Sci. Soc. America Proc.*, v. 32, no. 5, p. 607-615.
- Skibitzke, H. E., 1960, Electronic computers as an aid to the analysis of hydrologic problems: *Internat. Assoc. Scientific Hydrol. Pub.* 52, Comm. Subterranean waters, Gentbrugge, Belgium, p. 347.
- 1963, Determination of the coefficient of transmissibility from measurements of residual drawdown in a bailed well in *Methods of determining permeability, transmissibility, and drawdown*: U.S. Geol. Survey Water-Supply Paper 1536-I, p. 293.
- Slichter, C. S., 1899, Theoretical investigation of the motion of ground waters: U.S. Geol. Survey, 19th Ann. Rept., pt. 2, p. 295.
- Stallman, R. W., 1956, Numerical analysis of regional water levels to define aquifer hydrology: *Am. Geophys. Union Trans.*, v. 37, no. 4, p. 451-460.
- 1963a, Type curves for the solution of single boundary problems in Shortcuts and special problems in aquifer tests: U.S. Geol. Survey Water-Supply Paper 1545-C, p. 45-47.
- 1963b, Electric analog of three dimensional flow to wells and its application to unconfined aquifers: U.S. Geol. Survey Water-Supply Paper 1536-H, 38 p.
- Theis, C. V., 1935, The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground water storage: *Am. Geophys. Union Trans.*, pt. 2, Aug. 1935, p. 519-524.
- 1938, The significance and nature of the cone of depression in ground water bodies: *Econ. Geology*, v. 33, no. 8, p. 889-902.
- Thiem, Gunther, 1906, *Hydrologische methoden (Hydrologic methods)*: Leipzig, J. M. Gebhardt, 56 p.
- Thomas, L. H., 1949, *Elliptic problems in linear differential equations over a network*: Watson Scientific Computing Laboratory, Columbia Univ., N.Y.
- Trescott, P. C., 1973, Iterative digital model for aquifer evaluation: U.S. Geol. Survey open-file rept., June 1973, 63 p.
- Trescott, P. C., Pinder, G. F., and Jones, J. F., 1970, Digital model of alluvial aquifer: *Jour. Hydr. Div., Proc. Am. Soc. Civil Engineers*, HY5, p. 1115-1128.
- Walton, W. C., 1970, *Ground water resource evaluation*: New York, McGraw-Hill Book Co., 664 p.
- Weeks, E. P., 1969, Determining the ratio of horizontal to vertical permeability by aquifer-test analysis: *Water Resources Research*, v. 5, no. 1, p. 196-214.